Topologie des espaces métriques et normés

Karim Nour

Année 2016-2017

Table des matières

Chapitre 1

Topologie d'un espace métrique

1.1 Notions de base

Définition. Une distance sur un ensemble $E \neq \emptyset$ est une fonction $d : E^2 \to \mathbb{R}_+$ telle que, $\forall\, x, y, z, \in E$:

(1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(2) $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)

(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire)

Le couple (E, d) est dit espace métrique (abrégé en e.m.).

On a $\forall\, x, y, z \in E$, $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$.

Exemples.

(1) Si $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé, alors la fonction $d : E^2 \to \mathbb{R}_+$ définie par $\forall\, x, y \in E$, $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur E.

(2) La fonction $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ définie par $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ est une distance appelée distance usuelle et l'e.m. $(\mathbb{R}, d)$ est appelé la droite numérique.

(3) Les trois fonctions $d_1, d_2, d_3 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définies par $\forall\, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$,

$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$,

$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$,

$d_3((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$,

sont des distances sur $\mathbb{R}^2$.

(4) Soit $E \neq \emptyset$. La fonction $d : E^2 \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall\, x, y \in E,\ d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

est une distance dite triviale. L'e.m. (E, d) est dit discret.

Définitions. Soient A et B deux parties non vides de E et $a \in E$. On définit

- la distance de a à A par $d(a, A) = \inf\limits_{x \in A} d(a, x)$,

- la distance de A à B par $d(A, B) = \inf\limits_{(x,y) \in A \times B} d(x, y)$.

On a $d(A, B) = \inf\limits_{x \in A} d(x, B) = \inf\limits_{y \in B} d(y, A)$.

Si l'ensemble $\{d(x,y) \ / \ x,y \in A\}$ est majoré, le diamètre de A est défini par $\delta(A) = \sup_{x,y\in A} d(x,y)$ et on dit que A est une partie bornée de E.

Définitions. Soient $a \in E$ et $\rho \in \mathbb{R}_+$. On appelle
- boule ouverte de centre a et de rayon ρ, $B(a,\rho) = \{x \in E \ / \ d(x,a) < \rho\}$,
- boule fermée de centre a et de rayon ρ, $B'(a,\rho) = \{x \in E \ / \ d(x,a) \leq \rho\}$,
- sphère de centre a et de rayon ρ, $S(a,\rho) = \{x \in E \ / \ d(x,a) = \rho\}$.

Remarques.
(1) On a $B'(a,\rho) = B(a,\rho) \cup S(a,\rho)$ ou $S(a,\rho) = B'(a,\rho) \setminus B(a,\rho)$. Il est clair que $B(a,0) = \emptyset$ et $B'(a,0) = S(a,0) = \{a\}$. Si $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, alors $B(a,\rho)$ et $B'(a,\rho)$ ne sont jamais vides. Par contre, $S(a,\rho)$ peut être vide.
(2) Si $\rho \leq \rho'$, $B(a,\rho) \subseteq B(a,\rho')$ et $B'(a,\rho) \subseteq B'(a,\rho')$.

Exemples.
(1) Dans la droite numérique, si $a \in \mathbb{R}$ et $\rho \in \mathbb{R}_+^*$, alors $B(a,\rho) =]a-\rho, a+\rho[$, $B'(a,\rho) = [a-\rho, a+\rho]$ et $S(a,\rho) = \{a-\rho, a+\rho\}$. Donc les boules ouvertes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles ouverts bornés et les boules fermées de $\mathbb{R}$ sont les segments.
(2) Pour la distance d_1 sur $\mathbb{R}^2$, les boules ouvertes sont les disques ouverts, les boules fermées sont les disques fermés et les sphères sont les cercles. Pour la distance d_2 sur $\mathbb{R}^2$, les boules ouvertes sont les carrés ouverts, les boules fermées sont les carrés fermés et les sphères sont les bords des carrés.
(3) Dans un e.m. discret, on a
- $B(a,\rho) = \{a\}$ si $0 < \rho \leq 1$ et $B(a,\rho) = E$ si $\rho > 1$,
- $B'(a,\rho) = \{a\}$ si $0 < \rho < 1$ et $B'(a,\rho) = E$ si $\rho \geq 1$,
- $S(a,\rho) = \emptyset$ si $0 < \rho < 1$, $S(a,1) = E \setminus \{a\}$ et $S(a,\rho) = \emptyset$ si $\rho > 1$.

Théorème 1.1.1

1. *Une boule est un ensemble borné.*
2. *Tout sous-ensemble d'un ensemble borné est borné.*
3. *Un ensemble est borné ssi il est inclu dans une boule.*
4. *La réunion finie d'ensembles bornés est bornée.*

1.2 Les ouverts

Définition. Dans un e.m. (E,d), une partie A est dite ouverte si $(\forall\, x \in A)$ $(\exists\, \rho > 0)$ $(B(x,\rho) \subseteq A)$. On note $\mathcal{T}_E$ (ou tout simplement $\mathcal{T}$) la famille des parties ouvertes de E. L'ensemble $\mathcal{T}_E$ est dit la topologie de E. On a $\emptyset, E \in \mathcal{T}$.

Théorème 1.2.1 *On a* $(\forall\, a \in E)$ $(\forall\, \rho \in \mathbb{R}_+)$ $(B(a,\rho) \in \mathcal{T})$.

Exemples.
(1) Dans la droite numérique, les intervalles ouverts bornés sont des ouverts.
(2) Dans un e.m. discret, un singleton est un ouvert.
(3) Les singletons de $\mathbb{R}$ ne sont pas des ouverts.

Théorème 1.2.2 *$\mathcal{T}$ est stable par intersection finie et réunion quelconque.*

Exemples.
(1) Dans la droite numérique, les intervalles ouverts non bornés sont des ouverts.
(2) Tout sous-ensemble d'un e.m. discret est un ouvert.

Remarque. $\mathcal{T}$ n'est pas stable par intersection infinie.

Théorème 1.2.3 *Les parties ouvertes d'un e.m. sont les réunions de boules ouvertes.*

Exemples. Les ouverts de la droite numérique sont les réunions d'intervalles ouverts. Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ne sont pas des ouverts de $\mathbb{R}$.

Théorème 1.2.4 *Soit $A \subseteq E$. On a $A \in \mathcal{T}$ ssi $(\forall\, a \in A)$ $(\exists\, O \in \mathcal{T})$ $(a \in O \subseteq A)$.*

Définition. Soit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. On dit que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$ ssi tout ouvert s'écrit comme une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

Remarque. Dans un e.m., les boules ouvertes forment une base de la topologie.

1.3 Les voisinages

Définition. Soient (E, d) un e.m., $A \subseteq E$ et $a \in E$. On dit que A est un voisinage de a ssi $(\exists\, O \in \mathcal{T})$ $(a \in O \subseteq A)$. L'ensemble des voisinages de a est noté $\mathcal{V}_E(a)$ (ou tout simplement $\mathcal{V}(a)$). Evidemment $E \in \mathcal{V}_E(a)$ c.à.d. $\mathcal{V}_E(a) \neq \emptyset$.

Théorème 1.3.1 *Soient $A \subseteq E$ et $a \in E$. On a $A \in \mathcal{V}(a)$ ssi $(\exists\, \rho > 0)$ $(B(a, \rho) \subseteq A)$.*

Exemple. Dans la droite numérique, $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) n'est voisinage d'aucun de ses points.

Théorème 1.3.2 *Soit $a \in E$.*

1. *$\mathcal{V}_E(a)$ est stable par intersection finie.*
2. *Si $V \in \mathcal{V}_E(a)$ et $A \subseteq E$, alors $V \cup A \in \mathcal{V}_E(a)$.*

Théorème 1.3.3 *Soit $A \subseteq E$. On a $A \in \mathcal{T}$ ssi $(\forall\, a \in A)$ $(A \in \mathcal{V}(a))$.*

Définition. Soient $a \in E$ et $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}(a)$. On dit que $\mathcal{V}$ est un système fondamentale de voisinage de a si $(\forall\, W \in \mathcal{V}(a))$ $(\exists\, V \in \mathcal{V})$ $(V \subseteq W)$.

Remarque. La famille $(B(a, \rho))_{\rho > 0}$ (resp. $(B'(a, \rho))_{\rho > 0}$) est un système fondamentale de voisinage de a. La famille $(B(a, \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ (resp. $(B'(a, \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}^*}$) est un système fondamentale au plus dénombrable de voisinage de a.

1.4 L'intérieur d'une partie

Définition. Soient (E, d) un e.m., $A \subseteq E$ et $a \in E$. On dit que a est un point intérieur à A ssi $A \in \mathcal{V}(a)$. On appelle intérieur de A, et l'on note $\mathring{A}$, l'ensemble des points intérieurs à A. Donc $\mathring{A} \subseteq A$.

Théorème 1.4.1 *Soit $A \subseteq E$. On a $x \in \mathring{A}$ ssi $(\exists\, \rho > 0)$ $(B(x, \rho) \subseteq A)$.*

Exemples. Dans la droite numérique, on a $\mathring{\mathbb{Q}} = (\mathbb{R} \overset{\circ}{\setminus} \mathbb{Q}) = \emptyset$ et $]1 \overset{\circ}{,} 2] =]1, 2[$.

Théorème 1.4.2 *Soit $A \subseteq E$.*

1. *$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.*
2. *$A = \mathring{A} \Longleftrightarrow A \in \mathcal{T}$.*
3. *$\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$, $\mathring{\emptyset} = \emptyset$ et $\mathring{E} = E$.*

Exemples.
(1) L'intérieur d'une boule fermée n'est pas forcement la boule ouverte.
(2) Dans un e.m. discret E, on a $(\forall\, A \subseteq E)$ $(\mathring{A} = A)$.

Théorème 1.4.3 *Soient $A, B \subseteq E$.*

1. *$A \subseteq B \Rightarrow \mathring{A} \subseteq \mathring{B}$.*
2. *$(A \overset{\circ}{\cap} B) = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ et $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq (A \overset{\circ}{\cup} B)$.*

1.5 Les fermés

Définition. Soient (E, d) un e.m. et $F \subseteq E$. On dit que F est fermée ssi $E \backslash F \in \mathcal{T}$. On note $\mathcal{F}_E$ (ou tout simplement $\mathcal{F}$) la famille des parties fermées de E. On a $\emptyset, E \in \mathcal{F}$.

Exemples.
(1) Dans un e.m. discret E, on a $(\forall\, A \subseteq E)$ $(A \in \mathcal{F})$.
(2) Dans la droite numérique, $\mathbb{N}, \mathbb{Z} \in \mathcal{F}$, $\mathbb{Q} \notin \mathcal{T}$ et $\mathbb{Q} \notin \mathcal{F}$.

Théorème 1.5.1 *On a $(\forall a \in E)$ $(\forall\, \rho \in \mathbb{R}_+)$ $(B'(a, \rho) \in \mathcal{F})$.*

Exemples.
(1) Les singletons d'un e.m. sont des fermés.
(2) Dans la droite numérique, les intervalles fermés sont des fermés.

Théorème 1.5.2 *$\mathcal{F}$ est stable par intersection quelconque et réunion finie.*

Exemples.
(1) Toute partie finie d'un e.m. est fermée.
(2) Toute sphère d'un e.m. est fermée.

Remarque. $\mathcal{F}$ n'est pas stable par réunion infinie.

1.6 L'adhérence d'une partie

Théorème 1.6.1 *Soient (E,d) un e.m. et $A \subseteq E$. Il existe un plus petit fermé de E contenant A.*

Définition. On appelle fermeture ou adhérence de $A \subseteq E$, et l'on note $\overline{A}$, le plus petit sous-ensemble fermé de E contenant A. Un point de E est dit adhérent à A s'il appartient à l'adhérence de A. On a $A \subseteq \overline{A}$.

Exemples.
(1) Dans la droite numérique, $\overline{[0,1[} = [0,1]$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
(2) L'adhérence d'une boule ouverte n'est pas forcement la boule fermée.
(3) Dans un e.m. discret E, on a $(\forall\, A \subseteq E)$ $(\overline{A} = A)$.

Théorème 1.6.2 *Soit $A \subseteq E$.*

1. *A est fermé $\Longleftrightarrow \overline{A} = A$.*
2. *$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$ et $\overline{E} = E$.*

Théorème 1.6.3 *Soit $A \subseteq E$. On a $\overline{A} = \{a \in E \;\; / \;\; (\forall\, V \in \mathcal{V}(a)) \;(V \cap A \neq \emptyset)\} = \{a \in E \;\; / \;\; (\forall\, a \in O \in \mathcal{T}) \;(O \cap A \neq \emptyset)\} = \{a \in E \;\; / \;\; (\forall\, \rho > 0) \;(B(a,\rho) \cap A \neq \emptyset)\}$.*

Théorème 1.6.4 *Soient $A, B \subseteq E$.*

1. *$A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$.*
2. *$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.*

Définition. On dit que $A \subseteq E$ est dite partout dense dans E si $\overline{A} = E$.

Exemple. Dans la droite numérique, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ sont partout denses.

Théorème 1.6.5 *Soit $A \subseteq E$. On a A est partout dense dans E ssi $(\forall\, \emptyset \neq O \in \mathcal{T})$ $(O \cap A \neq \emptyset)$ ssi $(\forall\, x \in E)$ $(\forall\, \rho > 0)$ $(B(x,\rho) \cap A \neq \emptyset)$.*

1.7 Quelques ensembles remarquables

Théorème 1.7.1 *Soit $A \subseteq E$. On a $\overset{\circ}{(E \setminus A)} = E \setminus \overline{A}$ et $\overline{E \setminus A} = E \setminus \mathring{A}$.*

Définition. On appelle frontière de $A \subseteq E$, et on note $Fr(A)$, l'ensemble $\overline{A} \setminus \mathring{A}$. Il est clair que $Fr(A) \in \mathcal{F}$.

Exemples.
(1) La frontière d'une boule ouverte n'est pas forcement la sphère.
(2) Dans un e.m. discret E, on a $(\forall\, A \subseteq E)$ $(Fr(A) = \emptyset)$.
(3) Dans la droite numérique, on a $Fr(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $Fr(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ et $Fr([0,1[) = \{0,1\}$.

Définitions. Soient $A \subseteq E$ et $a \in E$.

(1) On dit que a est un point isolé de A ssi $(\exists\, V \in \mathcal{V}(a))$ $(V \cap A = \{a\})$. On note $iso(A)$ l'ensemble des points isolés de A. On remarque que $iso(A) \subseteq A$.

(2) On dit que a est un point d'accumulation de A ssi $(\forall\, V \in \mathcal{V}(a))$ $((V \cap A) \setminus \{a\} \neq \emptyset)$. L'ensemble des points d'accumulation de A est noté $acc(A)$. Il est clair que $acc(A) \subseteq \overline{A}$.

Théorème 1.7.2 *Soit $A \subseteq E$. On a $iso(A) = \{a \in E \ / \ (\exists\, a \in O \in \mathcal{T})\ (O \cap A = \{a\})\} = \{a \in E \ / \ (\exists\, \rho > 0)\ (B(a,\rho) \cap A = \{a\})\}$ et $acc(A) = \{a \in E \ / \ (\forall\, a \in O \in \mathcal{T})\ (O \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset)\} = \{a \in E \ / \ (\forall\, \rho > 0)\ (B(a,\rho) \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset)\}$.*

Théorème 1.7.3 *Soit $A \subseteq E$. On a $\overline{A} = iso(A) \cup acc(A)$ et $iso(A) \cap acc(A) = \emptyset$.*

Exemples. Dans la droite numérique, on a $iso(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, $acc(\mathbb{N}) = \emptyset$, $iso(\mathbb{Q}) = \emptyset$, $acc(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, $iso([0,1[\cup\{2\}) = \{2\}$ et $acc([0,1[\cup\{2\}) = [0,1]$.

1.8 Les sous-espaces métriques

Définitions Soient (E,d) un e.m., $\emptyset \neq A \subseteq E$ et d_A la restriction de d sur A^2. On a (A, d_A) est un e.m. dit sous-e.m. de E. Si $a \in E$ et $\rho \in \mathbb{R}_+$, on note $B_A(a,\rho)$ la boule ouverte de l'e.m. A centrée en a et de rayon ρ.

Exemples. Les ouverts (respectivement les fermés) d'une partie A d'un e.m. E ne sont pas nécessairement des ouverts (respectivement des fermés) de E.

Théorème 1.8.1 $(\forall\, a \in A)$ $(\forall\, \rho \in \mathbb{R}_+)$ *$(B_A(a,\rho) = B(a,\rho) \cap A)$.*

Théorème 1.8.2 *Les ouverts de A sont les traces des ouverts de E sur A.*

Corollaire 1.8.3 *$A \in \mathcal{T}_E$ ssi $(\forall\, O \in \mathcal{T}_A)$ $(O \in \mathcal{T}_E)$.*

Théorème 1.8.4 *Les fermés de A sont les traces des fermés de E sur A.*

Corollaire 1.8.5 *$A \in \mathcal{F}_E$ ssi $(\forall\, F \in \mathcal{F}_A)$ $(F \in \mathcal{F}_E)$.*

Théorème 1.8.6 *Les voisinages dans A de $a \in A$ sont les traces sur A des voisinages de a dans E.*

Théorème 1.8.7 *Soit $X \subseteq A$. Alors l'adhérence de X dans A est la trace sur A de l'adhérence de X dans E.*

Remarques. Soit $X \subseteq A$.

(1) L'intérieur de X dans A n'est pas la trace sur A de l'intérieur de X dans E.

(2) L'ensemble des points isolés (resp. d'accumulations) de X dans A est la trace sur A de l'ensemble des points isolés (resp. d'accumulations) de X dans E.

Chapitre 2

Continuité et convergence

Rappels. Soit $f : E \longrightarrow F$. On a les propriétés suivantes :
— $\forall\, A \subseteq E$, $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.
— $\forall\, B \subseteq F$, $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.
— $\forall\, B, C \subseteq F$, $f^{-1}(B \setminus C) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(C)$.
— $\forall\, B, C \subseteq E$, $f(B) \setminus f(C) \subseteq f(B \setminus C)$.
— $\forall\, (B_i)_{i\in I} \subseteq F$, $f^{-1}(\bigcup\limits_{i\in I} B_i) = \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
— $\forall\, (B_i)_{i\in I} \subseteq F$, $f^{-1}(\bigcap\limits_{i\in I} B_i) = \bigcap\limits_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
— $\forall\, (A_i)_{i\in I} \subseteq E$, $f(\bigcup\limits_{i\in I} A_i) = \bigcup\limits_{i\in I} f(A_i)$.
— $\forall\, (A_i)_{i\in I} \subseteq E$, $f(\bigcap\limits_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} f(A_i)$.

2.1 Fonctions continues

Définition. Soient E et F deux e.m., $a \in E$ et $f : E \longrightarrow F$. On dit que f est continue en a ssi $(\forall\, V \in \mathcal{V}_F(f(a)))$ $(\exists\, U \in \mathcal{V}_E(a))$ $(f(U) \subseteq V)$.

Théorème 2.1.1 *Soient $f : E \longrightarrow F$, $a \in E$ et $\mathcal{V}$ (resp. $\mathcal{U}$) un système fondamental de voisinage de $f(a)$ (resp. de a). On a f est continue en a ssi $(\forall\, V \in \mathcal{V})$ $(\exists\, U \in \mathcal{U})$ $(f(U) \subseteq V)$.*

Corollaire 2.1.2 *La fonction $f : E \longrightarrow F$ est continue en $a \in E$ ssi $(\forall\, \epsilon > 0)$ $(\exists\, \rho > 0)$ $(\forall\, x \in E)$ $(d_E(x, a) \leq \rho \Rightarrow d_F(f(x), f(a)) \leq \varepsilon)$. On peut remplacer (un ou les) $\leq$ par (un ou des) $<$.*

Théorème 2.1.3 *La fonction $f : E \longrightarrow F$ est continue en $a \in E$ ssi $(\forall\, V \in \mathcal{V}_F(f(a)))$ $(f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_E(a))$.*

Définition. On dit que $f : E \longrightarrow F$ est dite continue sur E si elle est continue en tout point de E.

Théorème 2.1.4 *Soit $f : E \longrightarrow F$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *La fonction f est continue.*
2. $(\forall A \subseteq E)\ (f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)})$.
3. $(\forall B \in \mathcal{F}_F)\ (f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_E)$.
4. $(\forall O \in \mathcal{T}_F)\ (f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_E)$.

Exemple. Toute fonction qui va d'un e.m. discret dans un e.m. est continue.

Théorème 2.1.5 *Si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}_F$, alors la fonction $f : E \longrightarrow F$ est continue ssi $(\forall O \in \mathcal{B})\ (f^{-1}(O) \in \mathcal{T}_E)$. En particulier, f est continue ssi pour toute boule ouvert B de F, $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_E$.*

Théorème 2.1.6 *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $A \subseteq E$. Si f est continue, alors $f_{/A}$ est continue.*

Théorème 2.1.7 *Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont des continues, alors $g \circ f : E \longrightarrow G$ est continue.*

Définitions. Soit $f : E \longrightarrow F$.
(1) La fonction f est dite uniformément continue ssi $(\forall \epsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x, y \in E)$ $(d_E(x,y) \leq \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) \leq \epsilon)$. Donc f est uniformément continue ssi $(\forall \epsilon > 0)$ $(\exists \delta > 0)\ (\forall A \subseteq E)\ (\delta(A) \leq \delta \Rightarrow \delta(f(A)) \leq \epsilon)$.
(2) Soit $k \in \mathbb{R}_+$. La fonction f est dite Lipschitzienne de module k ssi $(\forall x, y \in E)\ (d_F(f(x), f(y)) \leq k.d_E(x,y))$. La fonction f est dite Lipschitzienne ssi il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que f est Lipschitzienne de module k.

Théorème 2.1.8 *Soit $f : E \longrightarrow F$.*

1. *Si f est Lipschitzienne, alors f est uniformément continue.*
2. *Si f est uniformément continue, alors f est continue.*

Remarque. Les deux réciproques du théorème 2.1.8 sont fausses.

Définitions. Soit $f : E \longrightarrow F$.
(1) On dit que f est un homéomorphisme si f est bijective, f continue et f^{-1} est continue. Dans ce cas E et F sont dites homéomorphes.
(2) On dit que f est ouverte (resp. fermée) si $(\forall O \in \mathcal{T}_E)\ (f(O) \in \mathcal{T}_F)$ (resp. $(\forall A \in \mathcal{F}_E)\ (f(A) \in \mathcal{F}_F)$).

Théorème 2.1.9 *Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est un homéomorphisme ssi f est bijective et $f(\mathcal{T}_E) = \mathcal{T}_F$ et $f(\mathcal{F}_E) = \mathcal{F}_F$.*

Remarques.
(1) Un homéomorphisme est une fonction ouverte et fermée.
(2) Deux e.m. homéomorphes satisfont les mêmes propriétés topologiques.

Définitions. Soient d_1 et d_2 deux distances sur un ensemble E. On note $\mathcal{T}_{d_1}$ la topologie de (E, d_1) et $\mathcal{T}_{d_2}$ la topologie de (E, d_2).

(1) On dit que d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes ssi $\mathcal{T}_{d_1} = \mathcal{T}_{d_2}$ ssi id_E est un homéomorphisme.

(2) On dit que d_1 et d_2 sont équivalentes ssi $(\exists\, k, k' > 0)$ $(\forall\, x, y \in E)$ $(kd_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq k'd_1(x,y))$ ssi id_E et son inverse sont Lipschitziennes de modules strictement positifs.

Théorème 2.1.10 *Soient d_1 et d_2 deux distances sur E. Si d_1 et d_2 sont équivalentes, alors d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes.*

Remarque. La réciproque du théorème 2.1.10 est fausse.

Définition. Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction d'un e.m. E dans un e.m. F. On dit que f conserve la distance ssi $(\forall\, x, y \in E)$ $(d_F(f(x), f(y)) = d_E(x,y))$.

Théorème 2.1.11 *Une fonction $f : E \longrightarrow F$ qui conserve la distance est continue et injective. Si de plus f est surjective, alors f sera un homéomorphisme.*

Définition. On dit que $f : E \longrightarrow F$ est une isométrie ssi f est surjective et conserve la distance. Dans ce cas E et F sont isométriques.

Remarque. Deux e.m. isométriques sont essentiellement les mêmes (ils sont différents seulement en notation) c.à.d. ils possèdent les mêmes propriétés métriques.

2.2 Suites dans un e.m.

Définition. Soient (E, d) un e.m., $(a_n)_n$ une suite de E et $a \in E$. On dit que $(a_n)_n$ est convergente vers $a \in E$ ssi $(\forall\, V \in \mathcal{V}_E(a))$ $(\exists\, n_0 \in \mathbb{N})$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ $(n \geq n_0 \Longrightarrow a_n \in V)$ c.à.d. $\forall V \in \mathcal{V}_E(a)$, tous les termes de la suite, sauf un nombre fini, sont dans V. Dans ce cas a est dit une limite de la suite $(a_n)_n$. On dit qu'une suite est convergente si elle est convergente vers un certain point.

Théorème 2.2.1 *Soient $(a_n)_n$ une suite de E, $a \in E$ et $\mathcal{V}$ est un système fondamental de voisinage de a. On a $(a_n)_n$ est convergente vers a ssi $(\forall\, V \in \mathcal{V})$ $(\exists\, n_0 \in \mathbb{N})$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ $(n \geq n_0 \Longrightarrow a_n \in V)$.*

Corollaire 2.2.2

1. *La suite $(a_n)_n$ converge vers a ssi $(\forall\, \epsilon > 0)$ $(\exists\, n_0 \in \mathbb{N})$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ $(n \geq n_0 \Longrightarrow d(a_n, a) < \epsilon)$. On peut remplacer aussi $<$ par $\leq$.*
2. *La suite $(a_n)_n$ converge vers a ssi $\lim\limits_{n \to +\infty} d(a_n, a) = 0$ dans la droite numérique.*

Théorème 2.2.3 *Si $(a_n)_n$ est une suite convergente, alors sa limite est unique et on la note $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.*

Exemple. La suite $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente vers 0 dans la droite numérique mais ne converge pas vers 0 dans $\mathbb{R}$ muni da la distance triviale.

Théorème 2.2.4 *Soient $A \subseteq E$ et $a \in E$. Alors $a \in \overline{A}$ ssi il existe une suite $(a_n)_n$, dans A, convergente vers a.*

Corollaire 2.2.5 *Soit $A \subseteq E$. Alors $A \in \mathcal{F}$ ssi pour toute suite $(a_n)_n$ de A, si $(a_n)_n$ est convergente, dans E, vers a, alors $a \in A$.*

Définition. Soient $(a_n)_n$ une suite et $a \in E$. On dit a est une valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_n$ ssi $(\forall \epsilon > 0)$ $(\forall m \in \mathbb{N})$ $(\exists n \in \mathbb{N})$ $(n \geq m$ et $d(a_n, a) \leq \epsilon)$ ssi $(\forall V \in \mathcal{V}(a))$ $(\forall m \in \mathbb{N})$ $(\exists n \in \mathbb{N})$ $(n \geq m$ et $a_n \in V)$.

Remarque. Soient $(a_n)_n$ une suite et $a \in E$. Si a est une valeur d'adhérence de $(a_n)_n$, alors $a \in \overline{\{a_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}}$. Mais la réciproque n'est pas vraie en générale.

Théorème 2.2.6 *Soient $(a_n)_n$ une suite et $a \in E$. Alors a est une valeur d'adhérence de $(a_n)_n$ ssi $a \in \bigcap\limits_{m \in \mathbb{N}} \overline{P_m}$ où $P_m = \{a_n \,/\, n \geq m\}$.*

Notation Une sous-suite (ou suite extraite) d'une suite $(a_n)_n$ est souvent notée $(a_{\varphi(k)})_k$ où φ est une fonction strictement croissante sur les entiers. On a donc $\varphi(k) \geq k$ pour tout entier k. On remplace parfois les $\varphi(k)$ par n_k. On peut aussi noter une sous-suite par $(a_n)_{n \in I}$ où I est un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$.

Théorème 2.2.7 *Si $I_1, ..., I_m$ est une partition de $\mathbb{N}$ en sous-ensembles infinis, alors $(a_n)_n$ est convergente ssi toutes les suites $(a_n)_{n \in I_i}$ convergent vers la même limite.*

Théorème 2.2.8 *Soient $(a_n)_n$ une suite et $a \in E$. Alors a est une valeur d'adhérence de $(a_n)_n$ ssi a est la limite d'une sous-suite de $(a_n)_n$.*

Théorème 2.2.9 *Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est continue en $a \in E$ ssi pour toute suite $(a_n)_n$ de E, si $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = f(a)$.*

Théorème 2.2.10 *Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est uniformément continue ssi pour toutes suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ dans E,*
si $\lim\limits_{n \to +\infty} d_E(a_n, b_n) = 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} d_F(f(a_n), f(b_n)) = 0$.

2.3 Espaces métriques produits

Définition. Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $((E_i, d_i))_{1 \leq i \leq m}$ une famille d'e.m., $E = \prod\limits_{1 \leq i \leq m} E_i$ l'ensemble produit et d, d', d'' les fonctions définies de $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$ par
$\forall x = (x_1, ..., x_m), y = (y_1, ..., y_m) \in E$,

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} d_i^2(x_i, y_i)},\ d'(x, y) = \max_{1 \leq i \leq m} d_i(x_i, y_i) \text{ et } d''(x, y) = \sum_{i=1}^{m} d_i(x_i, y_i).$$

Théorème 2.3.1 *d, d' et d'' sont des distances équivalentes sur E.*

Définition. L'espace métrique produit est l'ensemble E muni de l'une des distances d, d' ou d''. Dans la suite on suppose que l'e.m. produit E est muni de la distance d'.

Lemme 2.3.2 $(\forall\, a = (a_1, ..., a_m) \in E)$ $(\forall\, \rho \in \mathbb{R}_+^*)$ $(B_E(a, \rho) = \prod_{1 \le i \le m} B_{E_i}(a_i, \rho))$.

Théorème 2.3.3 *Si* $(\forall\, 1 \le i \le m)$ $(O_i \in \mathcal{T}_{E_i})$, *alors* $\prod_{1 \le i \le m} O_i \in \mathcal{T}_E$.

Remarque. L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 < 1\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ qui ne s'écrit pas comme un produit de deux ouverts de $\mathbb{R}$.

Théorème 2.3.4 *Soit* $a = (a_1, ..., a_m) \in E$.
Si $(\forall\, 1 \le i \le m)$ $(V_i \in \mathcal{V}_{E_i}(a_i))$, *alors* $\prod_{1 \le i \le m} V_i \in \mathcal{V}_E(a)$.

Définition. $\forall\, 1 \le i \le m$, on note $Pr_i : E \longrightarrow E_i$ la projection de l'espace E sur E_i définie par $\forall\, x = (x_1, ..., x_m) \in E$, $Pr_i(x) = x_i$.

Théorème 2.3.5 $\forall\, 1 \le i \le m$, *Pr_i est Lipschitzienne (en particulier uniformément continue) et ouverte.*

Théorème 2.3.6 *Soient* $(a^n)_n$ *une suite dans l'espace produite* E *et et* $a \in E$. *Alors* $\lim_{n \to +\infty} a^n = a$ *ssi* $(\forall\, 1 \le i \le m)$ $(\lim_{n \to +\infty} Pr_i(a^n) = Pr_i(a))$.

Théorème 2.3.7 *Soit f une fonction d'un e.m. F dans l'espace produit E. Alors f est continue ssi* $(\forall\, 1 \le i \le m)$ $(Pr_i \circ f$ *est continue).*

Théorème 2.3.8 *Soit* $(\forall\, 1 \le i \le m)$ $(A_i \subseteq E_i)$. *On a :*

1. $\overline{\prod_{1 \le i \le m} A_i} = \prod_{1 \le i \le m} \overline{A}_i$, *et donc le produit de fermés est un fermé.*
2. $\overbrace{(\prod_{1 \le i \le m} A_i)}^{\circ} = \prod_{1 \le i \le m} \mathring{A}_i$, *et donc le produit d'ouverts est un ouvert.*
3. $Fr(\prod_{1 \le i \le m} A_i) = (Fr(A_1) \times \overline{A_2} \times ... \times \overline{A_m}) \cup ... \cup (\overline{A_1} \times ... \times \overline{A_{m_1}} \times Fr(A_m))$.

Remarque. Soit $(\forall\, 1 \le i \le m)$ $(A_i \subseteq E_i)$. On a :
(1) $iso(\prod_{1 \le i \le m} A_i) = \prod_{1 \le i \le m} iso(A_i)$.
(2) $acc(\prod_{1 \le i \le m} A_i) = (acc(A_1) \times \overline{A_2} \times ... \times \overline{A_m}) \cup ... \cup (\overline{A_1} \times ... \times \overline{A_{m_1}} \times acc(A_m))$.

Chapitre 3

Espaces métriques compacts

3.1 Définition d'un e.m. compact

Définitions.

(1) Une famille d'ouverts $(O_i)_{i\in I}$ d'un e.m. E est dit recouvrement ouvert de E ssi $E = \bigcup\limits_{i\in I} O_i$.

(2) Un e.m. E est dit compact ssi tout recouvrement ouvert de E admet un sous-recouvrement fini c.à.d. si $(O_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de E, alors il existe $J \subseteq I$ tel que J est fini et $E = \bigcup\limits_{i\in J} O_i$.

Exemples.

(1) La droite numérique $\mathbb{R}$ n'est pas compacte.

(2) Un e.m. fini est compact.

(3) Un e.m. discret est compact ssi il est fini.

Définition. On dit qu'une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties d'un e.m. E a la propriété de l'intersection finie ssi toute sous-famille finie de $(A_i)_{i\in I}$ a une intersection non vide.

Exemple. Dans la droite numérique $\mathbb{R}$, la famille $(]n, +\infty[)_{n\in\mathbb{N}}$ a la propriété de l'intersection finie.

Théorème 3.1.1 *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *E est compact.*
2. *Toute famille de fermés de E dont l'intersection est vide admet une sous-famille finie dont l'intersection est vide.*
3. *Toute famille de fermés de E ayant la propriété de l'intersection finie a une intersection non vide.*

Définition. Un e.m. E est dit séquentiellement compact ssi toute suite de E admet une sous-suite convergente c.à.d. toute suite dans E admet une valeur d'adhérence.

Théorème 3.1.2 *Un e.m. est compact ssi il est séquentiellement compact.*

3.2 Sous-e.m. compact

Définition. Une partie non vide A d'un e.m. E est dite compacte ssi le sous-e.m. A est compact. On peut considérer le vide comme une partie compacte.

Théorème 3.2.1 *Soit $A \subseteq E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est compacte.*
2. *Si $(O_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de E telle que $A \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$, alors il existe $J \subseteq I$ tel que J est fini et $A \subseteq \bigcup_{i\in J} O_i$.*
3. *Toute suite de A admet une sous-suite convergente dans A.*

Exemple L'intervalle $]0,1]$ n'est pas un compact.

Théorème 3.2.2 *Toute partie compacte est bornée est fermée.*

Théorème 3.2.3 *Dans un e.m. compact, toute partie fermée est compacte.*

Théorème 3.2.4 *Les parties fermées bornées de la droite numérique $\mathbb{R}$ sont les parties compactes. En particulier tout intervalle fermé borné est un compact de $\mathbb{R}$.*

Remarque. Le résultat précédent n'est pas valable dans tout e.m..

Théorème 3.2.5

1. *Une intersection non vide des parties compactes est compacte.*
2. *L'union finie des parties compactes est compacte.*

Remarque. L'union infinie de compacts n'est pas nécessairement un compact.

3.3 Quelques résultats

Théorème 3.3.1 *L'image d'un compact par une fonction continue est compacte. En particulier, un e.m. homéomorphe à un e.m. compact est compact.*

Exemple. Le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ est compact.

Théorème 3.3.2 *Si A est une partie bornée de $\mathbb{R}$, alors $\inf(A), \sup(A) \in \overline{A}$.*

Théorème 3.3.3 *Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et K un compact de E. Alors $f(K)$ est bornée dans $\mathbb{R}$ et f atteind ses bornes sur K.*

Théorème 3.3.4 "Heine" *Si $f : E \longrightarrow F$ est une fonction continue d'un e.m. compact E dans un e.m. F, alors f est uniformément continue.*

Théorème 3.3.5 "Tychonoff" *L'espace produit $E = \prod_{1\le i\le m} E_i$ est compact ssi $\forall\, 1 \le i \le m$, E_i est compact.*

Lemme 3.3.6 *Une partie $A \subseteq \prod_{1\le i\le m} E_i$ est bornée dans E ssi $\forall\, 1 \le i \le m$, $Pr_i(A)$ est bornée dans E_i.*

Théorème 3.3.7 *Les compacts de $\mathbb{R}^m$ sont les fermés bornés.*

Chapitre 4

Espaces métriques complets

4.1 Espaces et parties complets

Définition. Soit $(a_n)_n$ une suite dans un e.m. (E,d). On a dit que $(a_n)_n$ est une suite de Cauchy ssi $(\forall\, \epsilon > 0)$ $(\exists\, n_0 \in \mathbb{N})$ $(\forall\, p,q \in \mathbb{N})$ $(p,q \geq n_0 \Longrightarrow d(a_p,a_q) \leq \epsilon)$.

Théorème 4.1.1

1. *Une suite convergente est une suite de Cauchy.*
2. *Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est une suite de Cauchy.*
3. *Une suite $(a_n)_n$ est une suite de Cauchy ssi $\lim\limits_{m\to+\infty} \delta(P_m) = 0$.*
4. *Toute suite de Cauchy est bornée.*
5. *Une suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente, est convergente.*
6. *L'image par une fonction uniformément continue d'une une suite de Cauchy est une suite de Cauchy.*

Remarques.
(1) Une suite de Cauchy n'est pas toujours convergente.
(2) L'image par une fonction continue d'une suite de Cauchy n'est pas de Cauchy.

Définitions.
(1) On dit qu'un e.m. est complet ssi ses suites de Cauchy sont toutes convergentes.
(2) Une partie non vide d'un e.m. est dite complète si, comme sous-espace, elle est complète. On peut considérer le vide comme une partie complète.

Exemples.
(1) La droite numérique $\mathbb{R}$ est complet, mais $\mathbb{R}_+^*$ ne l'est pas.
(2) Un e.m. discret est toujours complet.

Remarques.
(1) Un e.m. homéomorphe à un e.m. complet n'est pas forcément complet.
(2) Un e.m. isométrique à un e.m. complet est complet.

Théorème 4.1.2 *Un e.m. compact est complet.*

Théorème 4.1.3 *Dans un e.m., toute partie complète est fermée.*

Théorème 4.1.4 *Dans un e.m. complet, toute partie fermée est complète.*

Corollaire 4.1.5 *Les parties complètes d'un e.m. complet sont les fermés.*

Remarque. Les parties complètes de $\mathbb{R}$ sont les fermés.

Théorème 4.1.6

1. *Une intersection des parties complètes est complète.*
2. *L'union finie des parties complètes est complète.*

Remarque. L'union infinie des parties complètes n'est pas toujours complète.

4.2 Quelques théorèmes

Théorème 4.2.1 "Cantor" *Si E est un e.m. complet et $(F_n)_n$ une suite décroissante des parties fermées non vides dans E telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \delta(F_n) = 0$, alors $F = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$ se réduit à un singleton.*

Théorème 4.2.2 *Soient $(E_i)_{1 \leq i \leq m}$ des e.m. et $E = \prod\limits_{1 \leq i \leq m} E_i$ l'espace produit.*
Alors E est complet ssi $\forall\, 1 \leq i \leq m$, E_i est complet.

Remarques.
(1) L'espace produit $\mathbb{R}^m$ est complet.
(2) Les parties complètes de $\mathbb{R}^m$ sont les fermés.

Théorème 4.2.3 "Prolongement" *Soient X une partie partout dense d'un e.m. E, F un e.m. complet et $f : X \longrightarrow F$ une fonction uniformément continue. Alors f admet un prolongement unique $\tilde{f} : E \longrightarrow F$ uniformément continue.*

Définition. Une fonction f d'un e.m. (E, d_E) dans un e.m. (F, d_F) est dite strictement contractante ssi $(\exists\, 0 \leq k < 1)$ $(\forall\, x, y \in E)$ $(d_F(f(x), f(y)) \leq k d_E(x, y))$.

Théorème 4.2.4 "Point fixe" *Si f est une fonction strictement contractante d'un e.m. complet E dans lui-même, alors f admet un point fixe unique.*

Définition. Dans un e.m. E, une partie A est dite rare ssi $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$.

Lemme 4.2.5 *Une partie A est rare ssi tout ouvert non vide contient une boule ouverte non vide disjointe de A.*

Théorème 4.2.6 "Baire" *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite de parties rares dans un e.m. complet* E *et* O *est un ouvert de* E*, alors* $O-(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n)\neq\emptyset$*. Autrement dit, si un ouvert d'un e.m. complet est couvert par une réunion d'une suite de ses parties, alors l'adhérence de l'une de ces parties admet un intérieur non vide.*

Théorème 4.2.7 "Complétion" *Soit* (E,d) *un e.m.. Il existe un e.m.* $(\tilde{E},\tilde{d})$ *complet qui contient un sous-e.m. isométrique à* (E,d) *et partout dense dans* $(\tilde{E},\tilde{d})$*. En plus l'e.m.* $(\tilde{E},\tilde{d})$ *est unique à une isométrie près et appelé le complété de* E*.*

Chapitre 5

Espaces métriques connexes

5.1 Espaces et parties connexes

Théorème 5.1.1 *Soit E un e.m.. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$\emptyset$ et E sont les seules parties qui sont à la fois ouvertes et fermées.*
2. *E n'est pas la réunion de deux parties non vides disjointes et ouvertes.*
3. *E n'est pas la réunion de deux parties non vides disjointes et fermées.*

Définitions.

(1) Un e.m. E est dit connexe ssi il vérifie l'une des trois propriétés du théorème 5.1.1. En particulier, E est connexe ssi pour toutes parties ouvertes (resp. fermées) non vides M_1 et M_2 si $E = M_1 \cup M_2$, alors $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$.

(2) Si un e.m. E est non connexe, alors il existe des parties M_1 et M_2 non vides, ouvertes (ou fermés) telles que $M_1 \cup M_2 = E$ et $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. La paire M_1, M_2 (qui sont des ouverts et des fermés de E) est dite une séparation (ou disconnection) de E.

Exemples.

(1) Tout e.m. discret formé de plus qu'un point est non connexe.

(2) L'e.m. $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe.

Définitions.

(1) Soient x et y deux éléments d'un e.m. E. On appelle chemin d'extrémités x et y (ou chemin joignant x et y) toute fonction continue $c : [0,1] \longrightarrow E$ telle que $c(0) = x$ et $c(1) = y$.

(2) On dit qu'un e.m. est connexe par arcs ssi tout couple d'éléments de E peut être joint par un chemin.

Théorème 5.1.2 *Tout e.m. connexe par arcs est connexe.*

Remarque. La réciproque du théorème 5.1.2 est fausse.

Définition. Une partie non vide A d'un e.m. E est dite connexe si elle est connexe comme sous-espace. On peut considérer le vide comme partie connexe.

Théorème 5.1.3 *Une partie $A \subseteq E$ est connexe ssi pour toutes parties ouvertes (resp. fermées) M_1 et M_2 dans E telles que $M_1 \cap A \neq \emptyset$, $M_2 \cap A \neq \emptyset$ et $A \subseteq M_1 \cup M_2$, on a $M_1 \cap M_2 \cap A \neq \emptyset$.*

Exemples.
(1) Tout singleton d'un e.m. est connexe.
(2) L'ensemble $]-1, 0[\cup]0, 1]$ n'est un pas un connexe de $\mathbb{R}$.
(3) Les connexes d'un e.m. discret sont les singletons.

Théorème 5.1.4 *Dans la droite numérique $\mathbb{R}$, les connexes sont les intervalles.*

Remarque. Dans la droite numérique $\mathbb{R}$, les connexes sont exactement les connexes par arcs (ce sont les intervalles).

5.2 Critères de connexité

Théorème 5.2.1 *L'image d'un connexe par une fonction continue est connexe.*

Remarque. Un e.m. homéomorphe à un e.m. connexe est aussi connexe.

Théorème 5.2.2 "valeurs intermédiaires" *Soient E un e.m. connexe, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \beta$. Si f prend les valeurs α et β, alors tout réel compris entre α et β est aussi une valeur prise par f.*

Remarque. Une fonction peut vérifier la propriété des valeurs intermédiaires sans être continue.

Théorème 5.2.3 *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille des parties connexes d'un e.m. E telle que $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ est connexe.*

Corollaire 5.2.4 *Si $\forall\, x, y \in E$, il existe une partie connexe de E contenant x et y, alors E est connexe.*

Corollaire 5.2.5 *Si $(A_n)_n$ est une suite de parties connexes de E tel que $(\forall\, n \in \mathbb{N})$ $(A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset)$, alors $\bigcup\limits_{n} A_n$ est connexe.*

Remarque. L'intersection de deux connexes n'est pas forcément un connexe.

Théorème 5.2.6 *Soit A une partie connexe de E. Si $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, alors B est connexe.*

Remarque. L'intérieur d'une partie connexe n'est pas forcément connexe.

Théorème 5.2.7 *Soient $(E_i)_{1\leq i\leq m}$ des e.m. et $E = \prod\limits_{1\leq i\leq m} E_i$ l'espace produit. Alors E est connexe ssi $\forall\, 1 \leq i \leq m$, E_i est connexe.*

Remarque. L'espace $\mathbb{R}^m$ est connexe.

5.3 Composantes connexes

Définition. Une partie A d'un e.m. E est dite composante connexe si elle est connexe et en plus elle n'est pas incluse strictement dans une partie connexe c.à.d. A est maximale par rapport à cette propriété et l'ordre "$\subseteq$" sur $\mathcal{P}(E)$).

Exemples.
(1) Si E est connexe, alors E est la seule composante connexe de E.
(2) Dans un e.m. discret, les composantes connexes sont les singletons.

Théorème 5.3.1 *Une composante connexe est fermée.*

Théorème 5.3.2 *Soient A et B deux composantes connexes de E, alors $A = B$ ou $A \cap B = \emptyset$.*

Définition. Soient $x \in E$ et $(A_i)_{i\in I}$ la famille des parties connexes contenant x (cette famille est non vide comme $\{x\}$ est l'un de ses éléments). On note $C_x = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

Théorème 5.3.3

1. *C_x est la composante connexe contenant x.*
2. *$\forall\, y \in C_x$, $C_y = C_x$.*

Théorème 5.3.4 *La famille $(C_x)_{x\in E}$ forme une partition de E, i.e. $(\exists\, I \subseteq E)$ $(E = \bigcup\limits_{x\in I} C_x)$ et $(\forall\, x \neq y \in I)$ $(C_x \cap C_y = \emptyset)$.*

Exemple. Les composantes connexes de $\mathbb{R}^*$ sont $\mathbb{R}^*{}_+$ et $\mathbb{R}^*{}_-$.

Théorème 5.3.5 *Si deux e.m. E et F sont homéomorphes, alors les composantes connexes de E et de F se correspondent bijectivement. En particlulier, deux e.m. homéomorphes ont le même nombre de composantes connexes.*

Chapitre 6

Topologie des espaces vectoriels normés

6.1 Notions de base

Définition. Un e.v.n. $(E, \|.\|)$ sur un corps K ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$) est un e.v. sur K muni d'une norme $\|.\|$, et donc muni d'une topologie associée à la distance d définie à partir de la norme $\|.\|$, par $(\forall\, x, y \in E)$ $(d(x, y) = \|x - y\|)$.

Théorème 6.1.1 *Si $(E, \|.\|)$ est un e.v.n., alors la fonction $\|.\|$ est uniformément continue sur E.*

Définition. Soient E un e.v.n., $a \in E$ et $\mu_0 \in K$. On définit les fonctions :
$\phi : E \times E \longrightarrow E$ par $(\forall\, x, y \in E)$ $(\phi(x, y) = x + y)$;
$\phi_a : E \longrightarrow E$ par $(\forall\, x \in E)$ $(\phi_a(x) = a + x)$: translation de vecteur a ;
$\psi : K \times E \longrightarrow E$ par $(\forall\, x \in E)$ $(\forall\, \lambda \in K)$ $(\psi(\lambda, x) = \lambda x)$;
$\psi_{\mu_0} : E \longrightarrow E$ par $(\forall\, x \in E)$ $(\psi_{\mu_0}(x) = \mu_0 x)$: homothétie de rapport μ_0 ;
$\psi_a : K \longrightarrow E$ par $(\forall\, \lambda \in K)$ $(\psi_a(\lambda) = \lambda a)$.

Théorème 6.1.2 *Soient E un e.v.n. $a \in E$ et $\mu_0 \in K$. Les fonctions ϕ, ϕ_a, ψ_{μ_0}, ψ_a sont uniforméments continues et la fonction ψ est continue. De plus $\phi_{-a} = (\phi_a)^{-1}$ et, pour $\mu_0 \neq 0$, $\psi_{\frac{1}{\mu_0}} = (\psi_{\mu_0})^{-1}$.*

Définition. Soient E un e.v. sur K, $a \in E$, $A, B \subseteq E$ et $\lambda \in K$. On note $a + A = \{a + x \mid x \in A\}$, $A + B = \{x + y \mid x \in A$ et $y \in B\}$ et $\lambda A = \{\lambda x \mid x \in A\}$.

Théorème 6.1.3 *Soient E un e.v.n. sur K, $a \in E$ et $\rho > 0$. Alors $B(a, \rho) = a + B(0, \rho)$, $B'(a, \rho) = a + B'(0, \rho)$, $S(a, \rho) = a + S(0, \rho)$, $B(0, \rho) = \rho B(0, 1)$, $B'(0, \rho) = \rho B'(0, 1)$ et $S(0, \rho) = \rho S(0, 1)$*

Théorème 6.1.4 *Soient E un e.v.n., $x \in E$ et $\rho > 0$. Alors $\overline{B(x, \rho)} = B'(x, \rho)$, $B'(x, \rho)^\circ = B(x, \rho)$ et $Fr(B(x, \rho)) = Fr(B'(x, \rho)) = S(x, \rho)$.*

Théorème 6.1.5 *Si F est un s.e.v. d'un e.v.n. E, alors $\overline{F}$ est un s.e.v. de E.*

Théorème 6.1.6 *L'unique e.v.n. compact est l'espace nul.*

Théorème 6.1.7 *Un e.v.n. est connexe par arcs et donc connexe.*

Lemme 6.1.8 *Dans un e.v.n. une boule est connexe par arcs.*

Théorème 6.1.9 *Dans un e.v.n. un ouvert non vide est connexe ssi il est connexe par arcs.*

Définition. Un e.v.n. est dit de Banach ssi il est complet.

6.2 Applications linéaires continues

Théorème 6.2.1 *Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *u est Lipschitzienne.*
2. *u est uniformément continue.*
3. *u est continue.*
4. *u est continue en zéro.*
5. *u est bornée sur la boule unité $B'(0,1)$.*
6. *u est bornée sur la sphère unité $S(0,1)$.*
7. $(\exists\, M \geq 0)$ $(\forall\, x \in E)$ $(\|u(x)\| \leq M\,\|x\|)$.

Théorème 6.2.2 *Si E et F sont deux e.v.n. (E ou F est différent de $\{0\}$) sur le même corps K et $u : E \longrightarrow F$ est une application linéaire surjective, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *u est un homéomorphisme.*
2. $(\exists\, \alpha, \beta > 0)$ $(\forall\, x \in E)$ $(\alpha\,\|x\| \leq \|u(x)\| \leq \beta\,\|x\|)$.
3. $(\exists\, \alpha, \beta > 0)$ $(\forall\, x \in S(0,1))$ $(\alpha \leq \|u(x)\| \leq \beta)$.

Remarque. Si $E = F = \{0\}$, alors le théorème 6.2.2 reste vrai.

Définition. Deux normes p_1 et p_2 sur un e.v. non nul E sont dites topologiquement équivalentes ssi elles déterminent la même topologie c.à.d. ssi la fonction $id : (E, p_1) \longrightarrow (E, p_2)$ est un homéomorphisme ssi $(\exists\, \alpha, \beta > 0)$ $(\forall\, x \in E)$ $(\alpha p_1(x) \leq p_2(x) \leq \beta p_1(x))$ ssi p_1 et p_2 sont équivalentes.

Exemple. Soient $(E_i, p_i)_{1 \leq i \leq m}$ des e.v.n. sur un même corps et $E = \prod\limits_{1 \leq i \leq m} E_i$ l'e.v. produit. Les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ définies par $\forall\, x = (x_1, \ldots, x_m) \in E$, $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{m} p_i(x_i)$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i^2(x_i)}$ et $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq m} p_i(x_i)$, sont équivalentes.

Remarques.

(1) Si p_1 et p_2 sont deux normes équivalentes sur un e.v. E, alors si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy (resp. converge vers x) dans (E,p_1) ssi $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy (resp. converge vers x) dans (E,p_2)

(2) Si p_1 et p'_1 sont deux normes équivalentes sur un e.v. E_1 et p_2 et p'_2 sont deux normes équivalentes sur un e.v. E_2, alors $u : (E_1,p_1) \longrightarrow (E_2,p_2)$ est continue (resp. uniformément continue) ssi $u : (E_1,p'_1) \longrightarrow (E_2,p'_2)$ est continue (resp. uniformément continue).

6.3 L'espace $\mathcal{L}_c(E,F)$

Définition. Soient E et F deux e.v.n. sur le même corps K. On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F.

Lemme 6.3.1 *Si $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$, alors*
$\sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \inf\{M \geq 0 \mid \forall\, x \in E,\ \|u(x)\| \leq M\,\|x\|\}$.

Définition. Soient E et F deux e.v.n. sur le même corps K et $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$. On pose $\|u\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|u(x)\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \inf\{M \geq 0 \mid \forall\, x \in E,\ \|u(x)\| \leq M\,\|x\|\}$.
On a $(\forall\, x \in E)$ $(\|u(x)\| \leq \|u\|\,.\,\|x\|)$.

Théorème 6.3.2 *$(\mathcal{L}_c(E,F), \|.\|)$ est un e.v.n..*

Théorème 6.3.3 *On a $\forall\, u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $\forall\, v \in \mathcal{L}_c(F,G)$, $\|v \circ u\| \leq \|v\|\,.\,\|u\|$.*

Théorème 6.3.4 *La fonction $f : \mathcal{L}_c(E,F) \times \mathcal{L}_c(F,G) \longrightarrow \mathcal{L}_c(E,G)$ définie par $f(u,v) = v \circ u$, est continue.*

Théorème 6.3.5 *Si F est un espace de Banach, alors $(\mathcal{L}_c(E,F), \|.\|)$ est aussi un espace de Banach.*

6.4 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition. Soit (E,p) un K-e.v.n. de dimension finie et $(e_i)_{1\leq i\leq m}$ une base de E. Les normes p_1, p_2 et p_∞ définies par $\forall\, x = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i e_i \in E$, $p_1(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} |x_i|$, $p_2(x) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} |x_i|^2}$ et $p_\infty(x) = \max\limits_{1\leq i\leq m} |x_i|$, sont équivalentes.

Théorème 6.4.1 *Les normes de K^m sont équivalentes.*

Corollaire 6.4.2 *La boule unité dans K^m est compacte.*

Théorème 6.4.3 *Tout e.v.n. E sur K, de dimension m, est homéomorphe à K^m.*

Corollaire 6.4.4 *Les normes d'un e.v.n. de dimension finie sont équivalentes.*

Corollaire 6.4.5 *La boule unité d'un e.v.n. de dimension finie est compacte.*

Corollaire 6.4.6 *Les compactes d'un e.v.n. de dimension finie sont les fermées bornées.*

Corollaire 6.4.7 *Un sous-e.v. de dimension finie d'un e.v.n. est de Banach (et donc fermé).*

Corollaire 6.4.8 *Toute application linéaire d'un e.v.n de dimension finie dans un e.v.n. est continue.*

Théorème 6.4.9 "Rieze" *Si la boule unité d'un e.v.n. est compacte, alors l'espace est de dimension finie.*