Géométrie affine et euclidienne

Karim Nour

Année 2017-2018

Table des matières

1 Introduction à la géométrie affine **5**
1.1 Espaces affines 5
1.2 Sous-espaces affines 6
1.3 Parallélisme 6
1.4 Applications affines 7
1.5 Barycentres 8
1.6 Théorèmes fondamentaux 9

2 Rappels sur les espaces euclidiens **11**
2.1 Espaces euclidiens 11
2.2 Isométries vectorielles 13
2.3 Angles orientés 14

3 Introdution à la géométrie affine euclidienne **17**
3.1 Espaces affines euclidiens 17
3.2 Barycentres et distances 18
3.3 Isométries affines euclidiennes. 19

4 Coniques et quadriques **21**
4.1 Coniques 21
4.2 Détermination d'une conique 22
4.3 Quadriques 23

Chapitre 1

Introduction à la géométrie affine

1.1 Espaces affines

Définition 1.1.1. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique 0. On appelle $\mathbb{K}$-espace affine un triplet $(X,\vec{E},+)$ formé d'un ensemble non vide X (l'ensemble des points), d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\vec{E}$ de dimension finie (l'espace des vecteurs appelé direction de l'espace affine) et d'une application $+ : X\times\vec{E}\to X$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall A\in X,\ \forall\vec{u},\vec{v}\in\vec{E},\ (A+\vec{u})+\vec{v}=A+(\vec{u}+\vec{v})$.
2. $\forall A\in X,\ \forall\vec{u}\in\vec{E},\ A+\vec{u}=A\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$.
3. $\forall A,B\in X,\ \exists\vec{u}\in\vec{E},\ A+\vec{u}=B$.

La dimension d'un espace affine est celle de sa direction.

Remarque 1.1.2. Soit $(X,\vec{E},+)$ un $\mathbb{K}$-espace affine, alors $\forall A\in X,\ X=A+\vec{E}$.

Exemple 1.1.3. Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\vec{E}$ induit un $\mathbb{K}$-espace affine $(\vec{E},\vec{E},+)$. En particulier $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace affine.

Proposition 1.1.4. *Soit $(X,\vec{E},+)$ un espace affine. Alors $\forall A,B\in X,\ \exists\vec{u}\in\vec{E}$ unique, $B=A+\vec{u}$; on note ce vecteur $\overrightarrow{AB}$.*

On a donc $\forall A,B\in X,\ B=A+\overrightarrow{AB},\ -\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$ et les points A et B sont confondus ssi $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

Remarque 1.1.5. Soit $(X,\vec{E},+)$ un $\mathbb{K}$-espace affine. On a $\forall A\in X,\ \vec{E}=\{\overrightarrow{AM}\mid M\in X\}$.

Exemple 1.1.6. Dans l'espace affine $\mathbb{K}^n$, si $A=(x_1,\dots,x_n),B=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{K}^n$, alors $\overrightarrow{AB}=(y_1-x_1,\dots,y_n-x_n)$.

Proposition 1.1.7 (Relation de Chasles)**.** *Soit $(X,\vec{E},+)$ un espace affine. Alors $\forall A,B,C\in X,\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.*

Définition 1.1.8. Soit $(X,\vec{E},+)$ un espace affine. Un repère affine de X, noté $\mathcal{R}=(O,\mathcal{B})$, est la donnée d'un $O\in X$, appelé origine du repère, et d'une base $\mathcal{B}=(\vec{e}_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\vec{E}$. Pour tout $A\in X$, il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$, telle que $A=O+\sum_{1\leq i\leq n}\lambda_i\vec{e}_i$. Ces scalaires sont appelés coordonnées de A dans le repère $\mathcal{R}$.

Proposition 1.1.9. *Soient $(X,\vec{E},+)$ un espace affine muni de deux repères affines $\mathcal{R}=(O,\mathcal{B})$ et $\mathcal{R}'=(O',\mathcal{B}')$ et $A\in X$. Notons $[A]_{\mathcal{R}}$ le vecteur des coordonnées de A dans le repère $\mathcal{R}$, $[O']_{\mathcal{R}}$ le vecteur des coordonnées de O' dans le repère $\mathcal{R}$, $[A]_{\mathcal{R}'}$ le vecteur des coordonnées de A dans le repère $\mathcal{R}'$ et $[\mathcal{B}']_{\mathcal{B}}$ la matrice exprimant les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$. Alors $[A]_{\mathcal{R}}=[O']_{\mathcal{R}}+[\mathcal{B}']_{\mathcal{B}}.[A]_{\mathcal{R}'}$.*

Proposition 1.1.10. *Soient $(X,\vec{E},+)$ un espace affine et $(A_i)_{1\leq i\leq m}$ une famille non vide de points de X. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *$\exists 1\leq i_0\leq m,\ (\overrightarrow{A_{i_0}A_i})_{1\leq i\leq m\,,\,i\neq i_0}$ est libre (resp. génératrice, une base) dans $\vec{E}$.*
2. *$\forall 1\leq j\leq m,\ (\overrightarrow{A_jA_i})_{1\leq i\leq m\,,\,i\neq j}$ est libre (resp. génératrice, une base) dans $\vec{E}$.*

La famille $(A_i)_{1\leq i\leq m}$ est alors dite affinement libre (resp. affinement génératrice, resp. base affine) de X.
La dimension d'un espace affine est le cardinal d'une base affine moins 1.

1.2 Sous-espaces affines

Définition 1.2.1. Soient $(X,\vec{E},+)$ un espace affine et Y une partie non vide de X. On dit que Y est un sous-espace affine de X ssi $\exists A \in Y$, $\exists \vec{F}$ sous-espace vectoriel de $\vec{E}$, $Y = A+\vec{F}$.

Proposition 1.2.2. *Soient $(X,\vec{E},+)$ un espace affine et $Y = A+\vec{F}$ un sous-espace affine de X, alors $\vec{F} = \{\overrightarrow{AM} \mid M \in Y\}$, $\forall B \in Y$, $Y = B+\vec{F}$ et $(Y,\vec{F},+)$ est un espace affine. On appelle $\vec{F}$ la direction de Y et on le note $\vec{Y}$.*

Exemple 1.2.3. Systèmes linéaires, équations différentielles, polynômes à valeur constant en un point, ...

Définition 1.2.4. Soit $(X,\vec{E},+)$ un espace affine.

1. On appelle droite affine de X tout sous-espace affine de X de dimension 1 ; elle s'écrit donc comme $A+\mathbb{K}\vec{u}$ avec $A \in X$ et $\vec{u} \in \vec{E}$.
2. On dit que les points $A_1,\dots,A_m$ de X sont alignés s'ils appartiennent à une même droite de X.
3. On appelle plan affine de X tout sous-espace affine de X de dimension 2 ; il écrit donc comme $A+\mathbb{K}\vec{u}+\mathbb{K}\vec{v}$ avec $A \in X$ et $\vec{u},\vec{v} \in \vec{E}$.
4. On dit que les droites $\mathcal{D}_1,\dots,\mathcal{D}_m$ de X sont coplanaires si elles apparatiennent à un même plan de X.
5. Si l'espace affine X est de dimension n, on appelle hyperplan de X tout sous-espace affine de X de dimension $n-1$.

Proposition 1.2.5.
1. *Par deux points distincts A et B passent une unique droite notée (AB).*
2. *Par trois points distincts A,B et C non alignés passent un unique plan noté (ABC).*

Proposition 1.2.6. *Soit $(X,\vec{E},+)$ un espace affine muni d'un repère affine $\mathcal{R}$. Tout sous-espace affine admet une représentation paramétrique et tout hyperplan admet une équation cartésienne.*

Proposition 1.2.7. *Soient $(X,\vec{E},+)$ un espace affine et $(X_i)_{1\le i\le m}$ une famille de sous-espaces affines. L'intersection $\bigcap_{1\le i\le m} X_i$ est soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine de $(X,\vec{E},+)$ dirigé par l'intersection $\bigcap_{1\le i\le m} \vec{X_i}$.*

Remarque 1.2.8. L'union de deux sous-espaces affines n'est en général pas un sous-espace affine.

Définition 1.2.9. Soient $(X,\vec{E},+)$ un espace affine et Y une partie non vide de X. On appelle sous espace-affine de $(X,\vec{E},+)$ engendré par Y l'intersection de tous les sous-espaces affines de $(X,\vec{E},+)$ contenant Y. C'est le plus petit sous-espace affine de $(X,\vec{E},+)$ dont l'espace des points contient Y et on le note $\langle Y \rangle$.

Proposition 1.2.10. *Soient $(X,\vec{E},+)$ un espace affine et $(A_i)_{1\le i\le m}$ une famille de points.*
On a $\forall\, 1 \le j \le m$, $\langle (A_i)_{1\le i\le m} \rangle = A_j + Vect\{\overrightarrow{A_jA_i} \mid 1 \le i \le m \text{ et } i \neq j\}$.

1.3 Parallélisme

Définition 1.3.1. Soient $(X,\vec{E},+)$ un espace affine et Y,Z deux sous-espaces affines. On dit que Y et Z sont parallèles (resp. faiblement parallèles) et on écrit $Y \parallel Z$ si l'on a $\vec{Y} = \vec{Z}$ (resp. $\vec{Y} \subseteq \vec{Z}$ ou $\vec{Z} \subseteq \vec{Y}$).

Remarque 1.3.2.
1. Deux droites $\mathcal{D}_1 = A+\mathbb{K}\vec{u_1}$ et $\mathcal{D}_2 = B+\mathbb{K}\vec{u_2}$ sont parallèle ssi $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont colinéaires.
2. Une droite $\mathcal{D} = A+\mathbb{K}\vec{u}$ est faiblement parallèle à un plan $\mathcal{P} = B+\mathbb{K}\vec{v_1}+\mathbb{K}\vec{v_2}$ ssi $\{\vec{u},\vec{v_1},\vec{v_2}\}$ est liée.

Théorème 1.3.3. *Soit $(X,\vec{E},+)$ un espace affine.*

1. *Pour tout $A \in X$ et pour tout sous-espace affine Y, il existe un unique sous-espace affine Z passant par A et parallèle à Y.*
2. *Si deux sous-espaces affines sont parallèles, alors ils sont disjoints ou confondus.*
3. *Si deux sous-espaces affines sont faiblement parallèles, alors l'un des deux est inclus dans l'autre ou ils sont disjoints.*

Remarque 1.3.4. Dans un espace affine,

1. par un point passe une unique droite parallèle à une droite donnée ;

2. deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles ;
3. deux droites parallèles ne se coupent pas ou sont confondues ;
4. deux droites disjointes d'un plan affine sont parallèles.

Théorème 1.3.5. *Soient $(X,\vec{E},+)$ un espace affine, Y,Z deux sous-espaces affines, $A \in Y$ et $B \in Z$. On a $Y \cap Z \neq \emptyset$ ssi $\overrightarrow{AB} \in \vec{Y}+\vec{Z}$.*

Remarque 1.3.6. Pour deux droites non parallèles $\mathcal{D}_1 = A+\mathbb{K}\vec{u_1}$ et $\mathcal{D}_2 = B+\mathbb{K}\vec{u_2}$, on a $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \neq \emptyset$ ssi $(\overrightarrow{AB},\vec{u}_1,\vec{u}_2)$ est liée.

Corollaire 1.3.7. *Soient $(X,\vec{E},+)$ un espace affine et Y,Z deux sous-espaces affines tels que $\vec{E} = \vec{Y} \oplus \vec{Z}$. Alors $Y \cap Z$ est un point.*

Corollaire 1.3.8. *Dans un espace affine, une droite non faiblement parallèle à un hyperplan, le coupe en un unique point.*

Remarque 1.3.9. Soit $(X,\vec{E},+)$ un espace affine de dimension 3.

1. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites de X. Alors soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles, soit $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ est un point, soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont non coplanaires.
2. Soient $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{P}$ un plan de X. Alors soit $\mathcal{D}$ est faiblement parallèle à $\mathcal{P}$, soit $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}$ est un point.
3. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de X. Alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont soit parallèles soit concourants en une droite.

Théorème 1.3.10 (Théorème du toit)**.** *Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ trois plans deux à deux non parallèles dans un espace affine de dimension 3. Alors leur intersection deux à deux sont trois droites concourantes ou parallèles.*

1.4 Applications affines

Définition 1.4.1. Soient $(X,\vec{E},+)$ et $(Y,\vec{F},+)$ deux espaces affines. Une application $f : X \to Y$ est dite affine si elle vérifie l'une des deux assertions équivalentes :

1. $\exists \vec{f} : \vec{E} \to \vec{F}$ linéaire et $\exists A \in X$ tels que $\forall M \in X$, $f(M) = f(A)+\vec{f}(\overrightarrow{AM})$ (i.e. $\forall \vec{u} \in \vec{E}$, $f(A+\vec{u}) = f(A)+\vec{f}(\vec{u})$).
2. $\exists \vec{f} : \vec{E} \to \vec{F}$ linéaire telle que $\forall A \in X, \forall M \in X$, $f(M) = f(A)+\vec{f}(\overrightarrow{AM})$ (i.e. $\forall A \in X, \forall \vec{u} \in \vec{E}$, $f(A+\vec{u}) = f(A)+\vec{f}(\vec{u})$).

Si tel est le cas l'application $\vec{f}$ est uniquement déterminée par $\vec{f}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{f(A)f(M)}$ (i.e. $\vec{f}(\vec{u}) = \overrightarrow{f(A)f(A+\vec{u})}$). L'application linéaire $\vec{f}$ est appellée partie linéaire de l'application affine f. Une application affine est totalement déterminée par l'image d'un point et par sa partie linéaire.

Proposition 1.4.2. *Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont deux applications affines, alors $g \circ f$ est une application affine de partie linéaire $\vec{g} \circ \vec{f}$.*

Proposition 1.4.3. *Une application affine f est injective (resp. surjective, bijective) ssi $\vec{f}$ est injective (resp. surjective, bijective).*

Définition 1.4.4. Soient $(X,\vec{E},+)$ un espace affine et $\vec{u} \in \vec{E}$. On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ notée $t_{\vec{u}}$, l'application affine définie par $\forall A \in X$, $t_{\vec{u}}(A) = A+\vec{u}$. Sa partie linéaire est l'identité $id_{\vec{E}}$.

Proposition 1.4.5. *Soit $(X,\vec{E},+)$ un espace affine. L'ensemble des translations muni de la composition est un groupe.*

Définition 1.4.6. Soient $(X,\vec{E},+)$ un espace affine, $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $O \in X$. On appelle homothétie de centre O et de rapport λ l'application affine $h_{O,\lambda}$ définie par $\forall \vec{u} \in \vec{E}$, $h_{O,\lambda}(O+\vec{u}) = O+\lambda\vec{u}$. Sa partie linéaire est donc $\overrightarrow{h_{O,\lambda}} = \lambda id_{\vec{E}}$. En particulier O est point fixe et $\forall A \in X$, $h_{O,\lambda}(A) = O+\lambda\overrightarrow{OA}$.

Proposition 1.4.7. *Une application affine $f : X \to X$ est une translation (resp. une homothétie distincte de l'identité) ssi $\vec{f} = id_{\vec{E}}$ (resp. $\vec{f} = \lambda id_{\vec{E}}$ avec $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0,1\}$).*

Proposition 1.4.8. *L'image par une translation ou une homothétie d'un sous-espace affine est un sous espace-affine qui lui est parallèle.*

Proposition 1.4.9. *Une application affine est une translation ou une homothétie ssi elle envoie toute droite sur une droite qui lui est parallèle.*

Définition 1.4.10. Soit $(X,\vec{E},+)$ un espace affine. L'ensemble des applications affines inversibles muni de la loi de composition forme un groupe que l'on appelle groupe affine. On le note $GA(X,\vec{E})$.

Proposition 1.4.11. *Soit $(X,\vec{E},+)$ un espace affine. L'ensemble $\{t_{\vec{u}},\mid \vec{u}\in\vec{E}\}\cup\{h_{\Omega,\lambda}\mid(\Omega,\lambda)\in X\times\mathbb{K}^*\}$ est un sous groupe de $GA(X,\vec{E})$, appelé groupe des homothéties-translations.*

Proposition 1.4.12. *Soient $(X,\vec{E},+)$ un espace affine, Y un sous espace affine et $\vec{F}$ un supplémentaire de $\vec{Y}$ dans $\vec{E}$. Alors $\forall M\in X$, $\exists M'\in Y$ unique, $\overrightarrow{MM'}\in\vec{F}$. L'application $p_{Y,\vec{F}}$ qui associe à tout $M\in X$, l'unique point $M'\in X$ (appelée projection sur Y parallèlement à $\vec{F}$) est affine de partie linéaire $p_{\vec{Y},\vec{F}}$. L'ensemble des points fixes de $p_{Y,\vec{F}}$ est Y et $p_{Y,\vec{F}}=p_{Y,\vec{F}}\circ p_{Y,\vec{F}}$. En plus chaque application affine f vérifiant $f\circ f=f$ est une projection.*

Proposition 1.4.13. *Soient $(X,\vec{E},+)$ un espace affine, Y un sous espace affine et $\vec{F}$ un supplémentaire de $\vec{Y}$ dans $\vec{E}$. L'application $s_{Y,\vec{F}}$ (appelée symétrie par rapport à Y parallèlement à $\vec{F}$) définie par $\forall M\in X$, $s_{Y,\vec{F}}(M)=p_{Y,\vec{F}}(M)+\overrightarrow{Mp_{Y,\vec{F}}(M)}$ est affine de partie linéaire $\vec{s}_{\vec{Y},\vec{F}}$. L'ensemble des points fixes de $s_{Y,\vec{F}}$ est Y et $s_{Y,\vec{F}}\circ s_{Y,\vec{F}}=id_X$. En plus, chaque application affine f vérifiant $f\circ f=id_X$ est une symétrie.*

Théorème 1.4.14. *Soient $(X,\vec{E},+)$ et $(Y,\vec{F},+)$ deux espaces affines, $(A,(\vec{e}_i)_{1\le i\le n})$ un repère affine de l'espace affine $(X,\vec{E},+)$, B un point de Y et $(\vec{u}_i)_{1\le i\le n}$ une famille de vecteurs de $\vec{F}$. Il existe une unique application affine $f:X\to Y$ telle que $f(A)=B$ et $\forall\,1\le i\le n$, $\vec{f}(\vec{e}_i)=\vec{u}_i$.*

Corollaire 1.4.15. *Soient $(X,\vec{E},+)$ et $(Y,\vec{F},+)$ deux espaces affines, $(A_i)_{0\le i\le n}$ une base affine de X et $(B_i)_{0\le i\le n}$ une famille de points de Y. Il existe une unique application affine $f:X\to Y$ tel que $\forall\,0\le i\le n$, $f(A_i)=B_i$.*

Corollaire 1.4.16. *L'image d'un repère affine (resp. base affine) par un élément du groupe affine est un repère affine (resp. base affine).*

Proposition 1.4.17. *Soient $(X,\vec{E},+)$ un espace affine de dimension m, $(Y,\vec{F},+)$ un espace affine de dimension n, $f:X\to Y$ une application affine. Fixons $\mathcal{R}_{A,\mathcal{B}_{\vec{E}}}$ un repère affine de $(X,\vec{E},+)$ et $\mathcal{R}_{B,\mathcal{B}_{\vec{F}}}$ un repère affine de $(Y,\vec{F},+)$. Notons $\mathcal{M}_f$ la matrice de $\vec{f}$ dans les bases $(\mathcal{B}_{\vec{E}},\mathcal{B}_{\vec{F}})$. Soit M un point de X. Notons $[M]$ le vecteur des coordonnées de M dans le repère $R_{A,\mathcal{B}_{\vec{E}}}$, $[f(M)]$ (resp. $[f(A)]$) le vecteur des coordonnées de $f(M)$ (resp. de $f(A)$) dans le repère $R_{B,\mathcal{B}_{\vec{F}}}$.*
Alors $[f(M)]=\mathcal{M}_f.[M]+[f(A)]$ et $\begin{pmatrix}[f(M)]\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathcal{M}_f & [f(A)]\\ O_{1,m} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}[M]\\1\end{pmatrix}$.
La matrice $\begin{pmatrix}\mathcal{M}_f & [f(A)]\\ O_{1,m} & 1\end{pmatrix}$ est la matrice de l'application affine f dans les repères $\mathcal{R}_{A,\mathcal{B}_{\vec{E}}}$ et $\mathcal{R}_{B,\mathcal{B}_{\vec{F}}}$.

Exemple 1.4.18. Donner les matrices d'une translation (resp. homothétie, projection, symétrie) dans des repères convenables.

Définition 1.4.19. Soit $(X,\vec{E},+)$ un espace affine sur un corps $\mathbb{K}$. On appelle forme affine toute application affine à valeurs dans $\mathbb{K}$. Sa partie linéaire est donc une forme linéaire. Si l'espace affine est de dimension finie égale à n et $(A,(\vec{e}_i)_{1\le i\le n})$ est un repère affine, alors une forme affine s'écrit en coordonnées sous la forme suivante $M=A+\sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i\mapsto f(A)+\sum_{i=1}^n x_i\vec{f}(\vec{e}_i)=a+\sum_{i=1}^n x_ib_i$.

Proposition 1.4.20. *Soient $(X,\vec{E},+)$ un espace affine de dimension finie n et f une forme affine non constante (autrement dit $\vec{f}$ est non nulle). Le lieu des zéros de f noté $Z(f)$ est un hyperplan affine et une de ses équations est $f=0$.*

Théorème 1.4.21. *Soient $(X,\vec{E},+)$ un espace affine de dimension n et Y une partie de X. On a alors l'équivalence entre*

1. *Y est l'ensemble des points d'un sous-espace affine de dimension p,*
2. *Y est l'intersection de $n-p$ hyperplans affines dont les parties linéaires des équations sont linéairement indépendantes.*

1.5 Barycentres

Théorème 1.5.1. *Soient $(X,\vec{E},+)$ un espace affine, $(A_i)_{1\le i\le m}$ une famille de points et $(\lambda_i)_{1\le i\le m}$ une famille de scalaires telle que $\sum_{1\le i\le m}\lambda_i\neq 0$. Il existe un unique point $G\in X$ tel que $\sum_{1\le i\le m}\lambda_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}$. Ce point est appellé barycentre du système $(A_i,\lambda_i)_{1\le i\le m}$. On a aussi $\forall M\in X$, $(\sum_{1\le i\le m}\lambda_i)\overrightarrow{MG}=\sum_{1\le i\le m}\lambda_i\overrightarrow{MA_i}$.*

Définition 1.5.2. Soient $(X,\vec{E},+)$ un espace affine et $(A_i)_{1\leq i\leq m}$ une famille de points. Alors on appelle isobarycentre de la famille de points $(A_i)_{1\leq i\leq m}$ le barycentre du système $(A_i,1)_{1\leq i\leq m}$.

Théorème 1.5.3. *Soient $(X,\vec{E},+)$ un espace affine, G le barycentre d'un système de points $(A_i,\lambda_i)_{1\leq i\leq m}$. Considérons $I_1\sqcup\cdots\sqcup I_l$ une partition de $\{1,...,m\}$ et supposons que $\forall\, 1\leq j\leq l$, $\mu_j=\sum_{i\in I_j}\lambda_i\neq 0$. On peut donc considérer le barycentre G_j du système de points $(A_i,\lambda_i)_{i\in I_j}$ et on l'appelle barycentre partiel. Le point G est le barycentre du système $(G_j,\mu_j)_{1\leq j\leq l}$.*

Exemple 1.5.4. Les médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé son centre de gravité.

Théorème 1.5.5. *Soient $(X,\vec{E},+)$ un espace affine et Y une partie non vide de X. L'ensemble Y est un sous-espace affine de $(X,\vec{E},+)$ ssi tout barycentre de système de points de Y appartient à Y.*

Théorème 1.5.6. *L'image par une application affine $f:X\to Y$ du barycentre d'un système $(A_i,\lambda_i)_{1\leq i\leq m}$ est le barycentre du système $(f(A_i),\lambda_i)_{1\leq i\leq m}$. Réciproquement, toute application $f:X\to Y$ qui respecte la notion de barycentre est affine.*

Proposition 1.5.7. *Soient $(X,\vec{E},+)$ un espace affine de dimension n et $(A_i)_{0\leq i\leq n}$ une base affine. Pour tout point $M\in X$, il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_i)_{0\leq i\leq n}$ tel que $\sum_{0\leq i\leq n}\lambda_i=1$ et M est le barycentre du système $(A_i,\lambda_i)_{0\leq i\leq n}$. La famille $(\lambda_i)_{0\leq i\leq n}$ est appelée coordonnées barycentriques du points M par rapport aux points $(A_i)_{0\leq i\leq n}$.*

1.6 Théorèmes fondamentaux

Définition 1.6.1.

1. Soient $\vec{u},\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires non nuls de $\vec{E}$, alors il existe un unique scalaire $\lambda\in\mathbb{K}^*$, tel que $\vec{u}=\lambda\vec{v}$. On notera le scalaire λ par $\frac{\vec{u}}{\vec{v}}$.
2. Considérons trois points distincts alignés A, B, C d'un espace affine $(X,\vec{E},+)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires non nuls et on peut considérer le scalaire $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}}$.

Théorème 1.6.2 (Thalès-Plan)**.** *Dans un plan affine on considère deux droites concourantes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ en un point noté O. On considère deux nouveaux points distincts A et B sur $\mathcal{D}$ et deux nouveaux points distincts A' et B' sur $\mathcal{D}'$. Si les droites (AA') et (BB') sont parallèles, alors on a les égalités $\frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OB}}=\frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OB'}}=\frac{\overrightarrow{AA'}}{\overrightarrow{BB'}}$. Réciproquement, si $\frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OB}}=\frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OB'}}$, alors les droites (AA') et (BB') sont parallèles.*

Théorème 1.6.3 (Thalès)**.** *Dans un espace affine $(X,\vec{E},+)$, considérons trois hyperplans affines parallèles $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}''$ et deux droites affines $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ non parallèles à ces hyperplans. Chaque droite coupe les hyperplans en un unique point. Notons alors $A=\mathcal{H}\cap\mathcal{D}$, $B=\mathcal{H}'\cap\mathcal{D}$, $C=\mathcal{H}''\cap\mathcal{D}$ et $A'=\mathcal{H}\cap\mathcal{D}'$, $B'=\mathcal{H}'\cap\mathcal{D}'$, $C'=\mathcal{H}''\cap\mathcal{D}'$. Alors on a $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}}=\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{A'C'}}$.*

Théorème 1.6.4 (Pappus - Plan)**.** *On considère dans un plan affine deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ munies chacune de trois points A, B, C et A', B', C'. On suppose que les droites (AB') et (BC') sont parallèles et les droites $(A'B)$ et $(B'C)$ sont parallèles. Alors les droites (AA') et (CC') sont parallèles.*

Théorème 1.6.5 (Desargues)**.** *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles d'un espace affine sans sommets communs. Si les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, ainsi que les droites (AC) et $(A'C')$ et les droites (BC) et $(B'C')$, alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles.*

Théorème 1.6.6 (Ménélaus - Plan)**.** *Dans un plan affine on considère trois points non alignés A, B et C. Soient un point A' sur la droite (BC), un point B' sur la droite (AC) et un point C' sur la droite (AB). Alors les points A', B' et C' sont alignés ssi $\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}}\frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}}\frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}}=1$.*

Théorème 1.6.7 (Théorème fondamental de la géométrie affine)**.** *On suppose que le corps de base est $\mathbb{R}$. Soit $f:X\to Y$ une bijection entre espace de points de deux espaces affines de même dimension plus grande ou égale à que 2. Si cette bijection conserve l'alignement, alors c'est une application affine.*

Chapitre 2

Rappels sur les espaces euclidiens

2.1 Espaces euclidiens

Définition 2.1.1. Soit $\vec{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un produit scalaire sur $\vec{E}$ est par définition une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est à dire une application : $(.\mid.) : \vec{E}\times\vec{E}\to\mathbb{R}$ vérifiant :

1. Bilinéarité : $\forall\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\vec{E}$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $(\lambda\vec{u}+\vec{v}\mid\vec{w})=\lambda(\vec{u}\mid\vec{w})+(\vec{v}\mid\vec{w})$ et $(\vec{w}\mid\lambda\vec{u}+\vec{v})=\lambda(\vec{w}\mid\vec{u})+(\vec{w}\mid\vec{v})$.
2. Symétrie : $\forall\vec{u},\vec{v}\in\vec{E}$, $(\vec{u}\mid\vec{v})=(\vec{v}\mid\vec{u})$.
3. Positivité : $\forall\vec{u}\in\vec{E}$, $(\vec{u}\mid\vec{u})\geq 0$.
4. Définie : $\forall\vec{u}\in\vec{E}$, $(\vec{u}\mid\vec{u})=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$.

On appelle espace préhilbertien réel tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. On appelle espace euclidien tout espace préhilbertien réel de dimension finie. La norme associée au produit scalaire est l'application $||\,.\,||: \vec{E}\to\mathbb{R}$ définie par $||\,\vec{u}\,||=\sqrt{(\vec{u}\mid\vec{u})}$. Cette norme induit une distance $d:\vec{E}\times\vec{E}\to\mathbb{R}$ définie par $d(\vec{u},\vec{v})=||\,\vec{u}-\vec{v}\,||$.

Théorème 2.1.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soit $(\vec{E},(.\mid.))$ un espace euclidien. Alors $\forall\vec{u},\vec{v}\in\vec{E}$, $(\vec{u}\mid\vec{v})\leq||\,\vec{u}\,||\,.\,||\,\vec{v}\,||$, avec égalité ssi les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.*

Définition 2.1.3. Soient $(\vec{E},(.\mid.))$ un espace euclidien et $\vec{F}$ un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$. On appelle orthogonal de $\vec{F}$ dans $\vec{E}$, le sous-espace vectoriel $\vec{F}^{\perp}=\{\vec{x}\in\vec{E}\mid\forall\vec{y}\in\vec{F},\,(\vec{x}\mid\vec{y})=0\}$.

Proposition 2.1.4. *Soit $(\vec{E},(.\mid.))$ un espace euclidien.*

1. *On a $\{\vec{0}\}^{\perp}=\vec{E}$ et $\vec{E}^{\perp}=\{\vec{0}\}$.*
2. *Si $\vec{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$, alors $\vec{E}=\vec{F}\oplus\vec{F}^{\perp}$ et $\vec{F}^{\perp\perp}=\vec{F}$.*
3. *Si $\vec{F}$ et $\vec{G}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\vec{E}$, alors $(\vec{F}+\vec{G})^{\perp}=\vec{F}^{\perp}\cap\vec{G}^{\perp}$ et $(\vec{F}\cap\vec{G})^{\perp}=\vec{F}^{\perp}+\vec{G}^{\perp}$.*

Théorème 2.1.5 (Représentation de Riez-Fréchet)**.** *Soit $(\vec{E},(.\mid.))$ un espace euclidien. Pour toute forme linéaire l, il existe un unique vecteur $\vec{u}\in\vec{E}$ tel que $\forall\vec{x}\in\vec{E}$, $l(\vec{x})=(\vec{u}\mid\vec{x})$.*

Définition 2.1.6. Soit $(\vec{E},(.\mid.))$ un espace euclidien de dimension n. On appelle base orthonormée (ou orthonormale) de $\vec{E}$, toute base $(\vec{e}_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\vec{E}$ vérifiant $\forall\,1\leq i,j\leq n$, $(\vec{e}_i\mid\vec{e}_j)=\delta_{ij}$.

Proposition 2.1.7. *Soit $(\vec{E},(.\mid.))$ un espace euclidien de dimension n.*

1. *Une famille $(\vec{e}_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\vec{E}$ vérifiant $\forall\,1\leq i,j\leq n$, $(\vec{e}_i\mid\vec{e}_j)=\delta_{ij}$ est nécessairement libre, c'est donc une base orthonormée de $\vec{E}$.*
2. *Si $\mathcal{B}$ est une base de $\vec{E}$, alors il existe un unique produit scalaire Φ tel que $(\vec{E},\Phi)$ soit un espace euclidien dont $\mathcal{B}$ est une base orthonormée.*

Théorème 2.1.8 (Orthonormalisation de Gram-Schmidt)**.** *Soient $(\vec{E},(.\mid.))$ un espace euclidien et $\mathcal{B}=(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n)$ une base de $\vec{E}$. Il existe une base orthonormale $\mathcal{B}'=(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ vérifiant $\forall\,1\leq k\leq n$, $\vec{e}_k\in Vect(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k)$. Cette base est obtenue de la manière suivante. On pose $\vec{e}_1=\frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}$. Pour tout $k>1$, supposons construit $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_{k-1}$, on pose $\vec{w}_k=\vec{v}_k-\sum_{i=1}^{k-1}(\vec{v}_k\mid\vec{e}_i)\vec{e}_i$ et $\vec{e}_k=\frac{\vec{w}_k}{\|\vec{w}_k\|}$.*

Proposition 2.1.9. *Considérons $(\vec{E},(.\mid.))$ un espace euclidien, $\vec{F}$ un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$ de dimension k et $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_k)$ une base orthonormée de $\vec{F}$. L'application $p_{\vec{F}}^{\perp}:\vec{E}\to\vec{E}$ définie par $p_{\vec{F}}^{\perp}(\vec{x})=\sum_{i=1}^{k}(\vec{x}\mid\vec{e}_i)\vec{e}_i$ est la projection sur $\vec{F}$ parallèlement à $\vec{F}^{\perp}$. On l'appelle projection orthogonale sur $\vec{F}$. La symérie orthogonale par rapport à $\vec{F}$ notée $s_{\vec{F}}^{\perp}$ est la symétrie par rapport à $\vec{F}$ parallèlement à $\vec{F}^{\perp}$. On a donc $s_{\vec{F}}^{\perp}=2p_{\vec{F}}^{\perp}-id_{\vec{E}}$.*

Définition 2.1.10. Une matrice A réelle carrée d'ordre n est dite orthogonale ssi ${}^tAA=Id_n$ ou $A^tA=Id_n$ ou A est inversible et $A^{-1}={}^tA$.

Proposition 2.1.11.

1. *Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale ssi ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.*
2. *Les matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ forment un sous-groupe du groupe linéaire noté $O(n,\mathbb{R})$ appelé groupe orthogonal.*
3. *Le déterminant d'une matrice orthogonale vaut 1 ou -1.*
4. *Les matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de déterminant 1 forment un sous-groupe du groupe orthogonal noté $S(n,\mathbb{R})$ appelé groupe spéciale orthogonal.*
5. *La matrice de passage entre deux bases orthonormées d'un espace euclidien de dimension n est orthogonale.*

Définition 2.1.12. Soit $(\vec{E},(.\mid.))$ un espace euclidien.

1. Deux bases orthonormées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\vec{E}$ sont dites équivalentes (et on note $\mathcal{B}\simeq\mathcal{B}'$) ssi $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')=1$.
2. La relation $\simeq$ est une relation d'équivalence et on a deux classes d'équivalence. Donner une orientation à l'espace c'est choisir une de ces classes d'équivalence. Toute base dans la classe d'équivalence choisie pour orienter l'espace est dite directe.

Définition 2.1.13. Soit $(\vec{E},(.\mid.))$ un espace euclidien de dimension n, muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$, l'espace est donc orienté. Le produit mixte des n vecteurs $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\in\vec{E}$ est par définition $[\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n]=det_{\mathcal{B}}(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n)$.

Proposition 2.1.14. *Le produit mixte est invariant si l'on ne change pas l'orientation et est changé en son opposé si l'on change l'orientation.*

Définition 2.1.15. Soit $(\vec{E},(.\mid.))$ un espace euclidien de dimension $n>1$, muni d'une base $\mathcal{B}$ orthonormale. Le produit vectoriel des $n-1$ vecteurs $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_{n-1}\in\vec{E}$ est l'unique vecteur noté $\vec{v}_1\wedge\cdots\wedge\vec{v}_{n-1}$ représentant la forme linéaire $\Phi:\vec{E}\to\mathbb{R}$ définie par $\Phi(\vec{u})=det_{\mathcal{B}}(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_{n-1},\vec{u})=[\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_{n-1},\vec{u}]=(\vec{v}_1\wedge\cdots\wedge\vec{v}_{n-1}\mid\vec{u})$.

Proposition 2.1.16. *Soient $(\vec{E},(.\mid.))$ un espace euclidien de dimension $n>1$, muni d'une base $\mathcal{B}$ orthonormale et $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_{n-1}\in\vec{E}$.*

1. *Les coordonnées de $v_1\wedge\cdots\wedge\vec{v}_{n-1}$ sont obtenues en évaluant Φ sur la base $\mathcal{B}$.*
2. *Si l'on change l'orientation de $\vec{E}$, le produit vectoriel est changé en son opposé.*
3. *Le produit vectoriel est nul ssi les vecteurs $v_1,\dots,v_{n-1}$ sont liés.*
4. *Si $(v_1,\dots,v_{n-1})$ est libre, alors $(v_1,\dots,v_{n-1},\vec{v}_1\wedge\cdots\wedge\vec{v}_{n-1})$ est une base.*
5. *Le produit vectoriel $\vec{v}_1\wedge\cdots\wedge\vec{v}_{n-1}$ est orthogonal à chacun des $\vec{v}_i$.*

Définition 2.1.17. Soit $(\vec{E},(.\mid.))$ un espace euclidien. La matrice de Gram des m vecteurs $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m\in\vec{E}$ est

$$\mathrm{Gram}(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m)=\begin{pmatrix}(\vec{v}_1\mid\vec{v}_1) & \dots & (\vec{v}_1\mid\vec{v}_m)\\ \vdots & & \vdots\\ (\vec{v}_m\mid\vec{v}_1) & \dots & (\vec{v}_m\mid\vec{v}_m)\end{pmatrix}.$$

Proposition 2.1.18. *Soient $(\vec{E},(.\mid.))$ un espace euclidien et $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m\in\vec{E}$.*

1. *Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $\overrightarrow{Vect}(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m)$, alors $Gram(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m)={}^tmat_{\mathcal{B}}(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m).mat_{\mathcal{B}}(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m)$.*
2. *Le rang de la matrice de Gram est la dimension de l'espace engendré par les vecteurs $\vec{v}_i$.*
3. *La famille $(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m)$ est libre ssi $\det Gram(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m)\neq 0$.*
4. *Si $m=\dim\vec{E}$ et $\vec{E}$ est orienté, alors $\det Gram(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m)=[\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m]^2$.*
5. *Si $m=\dim\vec{E}-1$ et $\vec{E}$ est orienté, alors $\det Gram(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m)=\parallel\vec{v}_1\wedge\cdots\wedge\vec{v}_m\parallel^2$.*

2.2 Isométries vectorielles

Proposition 2.2.1. *Soient $\vec{E}$ un espace vectoriel euclidien et $\vec{f} : \vec{E} \to \vec{E}$ une application. Si $\vec{f}$ vérifie $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$, $(\vec{f}(\vec{u}) \mid \vec{f}(\vec{v})) = (\vec{u} \mid \vec{v})$, alors $\vec{f}$ est linéaire et bijective. On dit que $\vec{f}$ est une isométrie vectorielle.*

Proposition 2.2.2. *Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel euclidien.*

1. *Une application linéaire $\vec{f} : \vec{E} \to \vec{E}$ est une isométrie ssi $\vec{f}$ est bijective et $\vec{f}^* = \vec{f}^{-1}$ où $\vec{f}^*$ est l'adjoint de $\vec{f}$.*
2. *Une application linéaire $\vec{f} : \vec{E} \to \vec{E}$ est une isométrie ssi elle envoie une base orthonormée sur une base orthonormée ssi elle envoie toute base orthonormée sur une base orthonormée.*
3. *La matrice d'une isométrie dans une base orthonormée est une matrice orthogonale.*
4. *L'ensemble des isométries forme un groupe pour la composition appelé groupe orthogonal et noté $O(\vec{E})$.*
5. *Les isométries vectorielles de déterminant 1 forment un sous groupe du groupe orthogonal appelé groupe spécial orthogonal et noté $SO(\vec{E})$. On dit que ces isométries sont directes ou positives.*

Proposition 2.2.3. *Soit $\vec{E}$ un espace euclidien et $\vec{F}$ un sous espace de $\vec{E}$.*

1. *La symétrie orthogonale $s^{\perp}_{\vec{F}}$ est une isométrie vectorielle.*
2. *La symétrie $s^{\perp}_{\vec{F}}$ est directe ssi la codimension de $\vec{F}$ est paire.*
3. *La symétrie $s^{\perp}_{\vec{F}}$ est une involution de $\vec{E}$. Réciproquement, toute involution de $O(\vec{E})$ est une symétrie orthogonale.*

Définition 2.2.4. Soit $\vec{E}$ un espace euclidien et $\vec{F}$ un sous espace de $\vec{E}$.

1. Si $\vec{F}$ est un hyperplan, alors $s^{\perp}_{\vec{F}}$ est appelée réflexion ou symétrie hyperplane.
2. Si la codimension de $\vec{F}$ est 2, alors $s^{\perp}_{\vec{F}}$ est appelée retournement.
3. Si la dimension de $\vec{E}$ est 3, alors une réflexion est une symétrie par rapport à un plan et un retournement est une symétrie par rapport à une droite.

Proposition 2.2.5. *Soit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ le groupe des complexes de module 1, L'application $\Phi : \mathbb{U} \to SO(2, \mathbb{R})$ définie par $\Phi(e^{i\theta} = a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de groupes. En particulier le groupe $SO(2, \mathbb{R})$ est commutatif.*

Proposition 2.2.6. *Soit $\vec{E}$ un espace euclidien de dimension 2. L'ensemble $O(\vec{E}) \setminus SO(\vec{E})$ est l'ensemble des symétries orthogonales par rapport aux droites vectorielles de $\vec{E}$.*

Proposition 2.2.7. *Soient $\vec{E}$ un espace euclidien de dimension 2 orienté et $\vec{f} \in SO(\vec{E})$. La matrice de $\vec{f}$ est la même dans toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\vec{E}$, compatible avec l'orientation. En particulier, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ défini à $2k\pi$ près tel que $mat_{\mathcal{B}}\, \vec{f} = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$. Le réel θ est fixé (modulo 2π) dès que $\vec{E}$ est orienté. On dit que $\vec{f}$ est une rotation d'angle θ.*

Exemple 2.2.8. Caractériser les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ qui correspondent aux matrices

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.2.9. *Soient $\vec{E}$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3 et $\vec{f} \in O(\vec{E})$. Il existe une base $\mathcal{B}$ orthonormée de $\vec{E}$ telle que $mat_{\mathcal{B}}\vec{f} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ est défini à $2k\pi$ près.*
Par conséquent une isométrie de $\vec{E}$ est une rotation ou la composé d'une rotation avec la symétrie orthogonale par rapport au plan orthogonal à l'axe de rotation. Pour fixer l'angle de la rotation, il faut fixer une orientation du plan orthogonal à l'axe (si l'espace $\vec{E}$ est orienté dès le départ, le plan est orienté dès que l'axe est orienté).

Proposition 2.2.10. *Soient $\vec{E}$ un espace euclidien orienté de dimension 3, $\vec{u} \in \vec{E}$ normé, $\theta \in \mathbb{R}$ et $\vec{f}$ la rotation d'axe $\mathbb{R}\vec{u}$ et d'angle θ. Alors $\vec{f}$ se décompose comme suit $\vec{f} = cos(\theta) id_{\vec{E}} + (1 - cos(\theta))(\vec{u} \mid .)\vec{u} + sin(\theta)(\vec{u} \wedge .)$. Si (u_1, u_2, u_3) sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base fixée, alors la matrice de $\vec{f}$ dans cette base est*

$$cos(\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - cos(\theta)) \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & u_1 u_3 \\ u_1 u_2 & u_2^2 & u_2 u_3 \\ u_1 u_3 & u_2 u_3 & u_3^2 \end{pmatrix} + sin(\theta) \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Méthode pour identifier un élément de $A \in O(3)$

1. On écarte les matrices I_3 et $-I_3$.
2. On commence par vérifier que la matrice A est orthogonale et calculer son déterminant.
3. Si la matrice A est symétrique, alors A correspond à une symétrie par rapport à l'ensemble de ses vecteurs fixes.
4. Si A n'est pas symétrique et $\det A = 1$, alors c'est une matrice d'un rotation d'axe. On détermine l'axe et l'angle de la rotation en utilisant la proposition précédente et le fait que chaque matrice carrée B se décompose d'une manière unique comme la somme d'une matrice symétrique $\frac{B+{}^tB}{2}$ et d'une matrice anti-symétrique $\frac{B-{}^tB}{2}$.
   (a) On considère $\frac{A-{}^tA}{2} = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$ la composante anti-symétrique de A.
   Le vecteur $\vec{v} = (p,q,r)$ est un vecteur directeur de l'axe de rotation qui l'oriente.
   (b) On détermine l'angle de la rotation θ (modulo 2π) et un vecteur normé orienté $\vec{u}$ de l'axe de la rotation grâce aux formules $\sin\theta \,.\, \vec{u} = \vec{v}$ et $tr(A) = 1 + 2\cos\theta$.
5. Si A n'est pas symétrique et $\det A = -1$, alors $-A$ est une matrice de rotation d'axe orienté par $\vec{u}$ et d'angle θ. La matrice A correspond donc à la composition de la rotation d'axe orienté par $\vec{u}$ et d'angle $\theta + \pi$ et la symétrie par rapport au plan orthogonal à $\mathbb{R}\vec{u}$.

Exemple 2.2.11. Caractériser les applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ qui correspondent aux matrices

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 1 & -4 \\ 4 & 4 & -7 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.2.12. *Soient $\vec{E}$ un espace euclidien et $\vec{f}$ une isométrie. Un sous-espace $\vec{F}$ de $\vec{E}$ est stable par $\vec{f}$ ssi $\vec{F}^{\perp}$ l'est aussi.*

Lemme 2.2.13. *Un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie admet une droite ou un plan stable.*

Proposition 2.2.14. *Soient $\vec{E}$ un espace euclidien de dimension n et $\vec{f} \in O(\vec{E})$. Il existe une base orthonormée de $\vec{E}$ dans laquelle la matrice de f est* $\begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & A_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_r \end{pmatrix}$ *où $p+q+2r = n$ et les $A_i = \begin{pmatrix} cos(\theta_i) & -sin(\theta_i) \\ sin(\theta_i) & cos(\theta_i) \end{pmatrix}$ sont des matrices de rotation.*

Exemple 2.2.15. Caractériser les applications linéaires de $\mathbb{R}^4$ qui correspondent aux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0 & -0.8 \\ 0.6 & 0 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0.6 \\ 0.8 & 0 & 0.6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \\ 0.1 & 0.7 & -0.7 & -0.1 \\ 0.1 & -0.7 & -0.7 & 0.1 \\ 0.7 & -0.1 & 0.1 & -0.7 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.2.16. *Soit $\vec{E}$ un espace euclidien. Les symétries hyperplanes engendrent le groupe orthogonal $O(\vec{E})$. Plus précisément tout élément de $O(\vec{E})$ est la composée d'au plus $\dim\vec{E}$ symétries hyperplanes. Une isométrie est directe ssi elle est engendrée par un nombre pair de symétries hyperplanes.*

2.3 Angles orientés

Dans cette section, on considère un plan euclidien orienté $\vec{E}$.

Proposition 2.3.1. *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs unitaires de $\vec{E}$, il existe une unique rotation $R_{\vec{u},\vec{v}}$ qui envoie $\vec{u}$ sur $\vec{v}$.*

Définition 2.3.2.

1. On considère sur l'ensemble des couples de vecteurs unitaires de $\vec{E}$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par

$$(\vec{u},\vec{v})\mathcal{R}(\vec{u}',\vec{v}') \Leftrightarrow \text{ il existe une rotation } r \in O^+(\vec{E}) \text{ telle que } r(\vec{u}) = \vec{u}' \text{ et } r(\vec{v}) = \vec{v}'.$$

2. Les classes d'équivalences sont appelées angles orientés de $\vec{E}$.

3. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs unitaires de $\vec{E}$, on note $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ l'angle orienté du couple $(\vec{u},\vec{v})$.

Proposition 2.3.3. *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs unitaires de $\vec{E}$, alors $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = \widehat{(\vec{u}',\vec{v}')} \Leftrightarrow R_{\vec{u},\vec{v}} = R_{\vec{u}',\vec{v}'}$. Par conséquent pour tout couple de vecteurs unitaires d'un plan euclidien $\vec{E}$, la rotation $R_{\vec{u},\vec{v}}$ ne dépend que de $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ et pas du choix de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

Définition 2.3.4. On définit une application Φ de l'ensemble des angles orientés de $\vec{E}$ noté $\mathcal{A}_{Or}$ vers le groupe des rotations de $\vec{E}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{Or} & \to & O^+(\vec{E}) \\ \widehat{(\vec{u},\vec{v})} & \mapsto & R_{\vec{u},\vec{v}}. \end{array}$$

Proposition 2.3.5. *L'application Φ est une bijection et il existe une unique loi de groupe sur l'ensemble des angles orientés de $\vec{E}$, loi que l'on notera $+$, telle que cette bijection soit un isomorphisme de groupes.*

1. *Son élément neutre est l'angle $\widehat{(\vec{u},\vec{u})}$ pour tout vecteur unitaire $\vec{u}$ de $\vec{E}$. Cet angle est appellé angle nul.*
2. *Si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont trois vecteurs unitaires de $\vec{E}$, alors $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} + \widehat{(\vec{v},\vec{w})} = \widehat{(\vec{u},\vec{w})}$.*
3. *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un couple de vecteurs unitaires de $\vec{E}$, alors $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = -\widehat{(\vec{v},\vec{u})}$.*
4. *Si $\vec{u}$ est un vecteur unitaire, alors $\widehat{(\vec{u},-\vec{u})}$ ne dépend pas de $\vec{u}$ et est appelé angle plat. De plus $\widehat{(\vec{u},-\vec{u})} + \widehat{(\vec{u},-\vec{u})} = \widehat{(\vec{u},\vec{u})}$.*

Définition 2.3.6. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires de $\vec{E}$. On définit la mesure de l'angle $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$, notée $\mathrm{Mes}(\widehat{(\vec{u},\vec{v})})$ comme la mesure de l'angle de la rotation $R_{\vec{u},\vec{v}}$.

Proposition 2.3.7. *L'application $Mes : \mathcal{A}_{Or} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est un isomorphisme de groupes.*
Donc, pour tous vecteurs unitaires $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ de $\vec{E}$,

1. $Mes(\widehat{(\vec{u},\vec{u})}) = 0\ [2\pi]$ *et* $Mes(\widehat{(\vec{u},-\vec{u})}) = \pi\ [2\pi]$,
2. $Mes(\widehat{(\vec{u},\vec{v})}) = -Mes(\widehat{(\vec{v},\vec{u})})\ [2\pi]$,
3. $Mes(\widehat{(\vec{u},\vec{v})}) + Mes(\widehat{(\vec{v},\vec{w})}) = Mes(\widehat{(\vec{u},\vec{w})})\ [2\pi]$.

Proposition 2.3.8. *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\vec{E}$ et $\theta = Mes(\widehat{\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}})$, alors*

1. $(\vec{u} \mid \vec{v}) = \parallel \vec{u} \parallel . \parallel \vec{v} \parallel . \cos\theta$,
2. $\det(\vec{u},\vec{v}) = \parallel \vec{u} \parallel . \parallel \vec{v} \parallel . \sin\theta$.

Chapitre 3

Introdution à la géométrie affine euclidienne

3.1 Espaces affines euclidiens

Définition 3.1.1. On appelle espace affine euclidien tout espace affine dont la direction est un espace euclidien. On le notera par conséquent $(X,\vec{E},+,(.\mid .))$ où $(.\mid .)$ est le produit scalaire sur l'espace vectoriel $\vec{E}$. L'application $d : X\times X\to\mathbb{R}$ définie par $d(A,B)=\|\overrightarrow{AB}\|$ est une distance.

Exemples 3.1.2.
1. Tout espace euclidien $(\vec{E},+,.,(.\mid .))$ induit un espace affine euclidien $(\vec{E},\vec{E},+,(.\mid .))$.
2. Tout sous-espace affine Y d'un espace affine euclidien $(X,\vec{E},+,(.\mid .))$ a une structure canonique d'espace affine euclidien $(Y,\vec{Y},+_{\vec{Y}\times Y},(.\mid .)_{\vec{Y}\times\vec{Y}})$.

Définition 3.1.3. Soit $(X,\vec{E},+,(.\mid .))$ un espace affine euclidien.
1. Un repère orthonormé est un repère dont la base est orthonormée.
2. Deux sous-espaces affines Y et Z de X sont dits orthogonaux (et on écrit $Y\perp Z$) lorsque leur direction sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux de $\vec{E}$ c'est à dire $\vec{Y}\subseteq\vec{Z}^{\perp}$ ou $\vec{Z}\subseteq\vec{Y}^{\perp}$.

Définition 3.1.4. Soient $(X,\vec{E},+,(.\mid .))$ un espace affine euclidien et Y un sous-espace affine de X. On définit la projection orthogonale sur Y (notée $p_Y^{\perp}$) et la symétrie orthogonale par rapport à Y (notée $s_Y^{\perp}$) par $p_Y^{\perp}=p_{Y,\vec{Y}^{\perp}}$ et $s_Y^{\perp}=s_{Y,\vec{Y}^{\perp}}$.

Théorème 3.1.5. *Soit $(X,\vec{E},+,(.\mid .))$ un espace affine euclidien.*
1. *Pour tout sous-espace Y et pour tout point A, il existe un unique sous-espace Z passant par A tel que $dim(Z)=dim(X)-dim(Y)$ et Z est orthogonal à Y.*
2. *Pour tous sous-espaces Y_1,Y_2,Z de X, si Y_1 et Y_2 sont parallèles et Z est orthogonal à Y_1, alors Z est orthogonal à Y_2.*

Corollaire 3.1.6. *Il existe une unique droite passant par un point et orthogonale à un hyperplan. Il existe un unique hyperplan passant par un point et orthogonal à une droite.*

Théorème 3.1.7. *Deux droites orthogonales à un hyperplan sont parallèles. Deux hyperplans orthogonaux à une droite sont parallèles.*

Théorème 3.1.8 (Pythagore)**.** *Dans un espace affine euclidien $(X,\vec{E},+,(.\mid .))$ de dimension au moins 2, trois points non alignés A,B,C forment un triangle rectangle en B ssi $\|\overrightarrow{AC}\|^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2+\|\overrightarrow{BC}\|^2$.*

Proposition 3.1.9. *Soient $(X,\vec{E},+,(.\mid .))$ un espace affine euclidien, $\vec{u}$ un vecteur non nul, c une constante et G un point de X. L'ensemble des points $\mathcal{E}=\{M\in X\mid(\vec{u}\mid\overrightarrow{GM})=c\}$ est un hyperplan affine de direction orthogonale au vecteur $\vec{u}$.*

Définition 3.1.10. Soit $(X,\vec{E},+,(.\mid .))$ un espace affine euclidien. On appelle sphère centrée en un point O et de rayon $r\geq 0$, l'ensemble $\mathcal{S}(O,r)=\{M\in X\mid\ d(O,M)=r\}$.

Proposition 3.1.11. *Soient $(X,\vec{E},+,(.\mid .))$ un espace affine euclidien et A,B deux points distincts de X.*
L'ensemble des points $\mathcal{E}=\{M\in X\mid(\overrightarrow{AM}\mid\overrightarrow{BM})=0\}$ est la sphère centrée en le milieu O de (A,B) et de rayon $d(O,A)$.

3.2 Barycentres et distances

Théorème 3.2.1. *Soient $(X,\vec{E},+,(.\mid.))$ un espace affine euclidien, $(A_i)_{1\leq i\leq m}$ une famille de points de X, $(\lambda_i)_{1\leq i\leq m}$ une famille de scalaires telle que $\sum_{1\leq i\leq m}\lambda_i\neq 0$ et G le barycentre du système $(A_i,\lambda_i)_{1\leq i\leq m}$.*

Alors $\forall M\in X$, $\sum_{1\leq i\leq m}\lambda_i \parallel \overrightarrow{MA_i}\parallel^2=\left(\sum_{1\leq i\leq m}\lambda_i\right)\parallel\overrightarrow{MG}\parallel^2+\sum_{1\leq i\leq m}\lambda_i\parallel\overrightarrow{GA_i}\parallel^2$.

Corollaire 3.2.2. *Soient $(X,\vec{E},+,(.\mid.))$ un espace affine euclidien, $(A_i)_{1\leq i\leq m}$ une famille de points de X et $(\lambda_i)_{1\leq i\leq m}$ une famille de scalaires et $k\in\mathbb{R}$. Notons $\mathcal{E}=\{M\in X\mid \sum_{1\leq i\leq m}\lambda_i\parallel\overrightarrow{MA_i}\parallel^2=k\}$.*

1. *Si $\sum_{1\leq i\leq m}\lambda_i\neq 0$ et G le barycentre du système $(A_i,\lambda_i)_{1\leq i\leq m}$, alors $\mathcal{E}$ est soit l'ensemble vide, soit $\{G\}$, soit une sphère de centre G.*
2. *Si $\sum_{1\leq i\leq m}\lambda_i=0$, alors il existe un unique vecteur $\vec{u}$ tel que $\forall M\in X$, $\sum_{1\leq i\leq m}\lambda_i\overrightarrow{MA_i}=\vec{u}$. En ce cas $\mathcal{E}$ est soit l'ensemble vide, soit un hyperplan orthogonal à $\vec{u}$, soit l'espace tout entier.*

Corollaire 3.2.3. *Soient $(X,\vec{E},+,(.\mid.))$ un espace affine euclidien, $k>0$ et $A,B\in X$ deux points distincts.*
Alors $\mathcal{E}=\{M\in X\mid d(M,A)=k\,d(M,B)\}$ est

1. *si $k\neq 1$, une sphère de centre G le barycentre de $(A,1)$ et de $(B,-k^2)$,*
2. *si $k=1$, l'hyperplan médiateur de A et B, c'est à dire $I+(\mathbb{R}\,\overrightarrow{AB})^{\perp}$ avec I le milieu de A et de B.*

Définition 3.2.4. Soient $(X,\vec{E},(.\mid.))$ un espace affine euclidien, Y,Z deux sous-espaces affines de X et $A\in X$.
- La distance entre A et Y est définie par $d(A,Y)=\inf\limits_{M\in Y}d(A,M)$.
- La distance entre Y et Z est définie par $d(Y,Z)=\inf\limits_{M\in Y,N\in Z}d(M,N)$.

Théorème 3.2.5 (Distance à un sous-espace)**.** *Soient $(X,\vec{E},+,(.\mid.))$ un espace affine euclidien, Y un sous-espace affine de X et $A\in X$. Il existe un unique point $P\in Y$ tel que $d(A,Y)=d(A,P)$. Soit $O\in Y$ et $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_k)$ une base de $\vec{Y}$. On a $d(A,Y)=\sqrt{\frac{\det Gram(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_k,\overrightarrow{OA})}{\det Gram(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_k)}}$.*

Corollaire 3.2.6. *Soient $(X,\vec{E},(.\mid.))$ un espace affine euclidien de dimension 3, $O,A\in X$ et $\vec{u},\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\vec{E}$. Alors $d(A,O+\mathbb{R}\vec{u})=\frac{\|\overrightarrow{OA}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ et $d(A,O+\mathbb{R}\vec{u}+\mathbb{R}\vec{v})=\frac{\left|[\overrightarrow{OA},\vec{u},\vec{v}]\right|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$.*

Proposition 3.2.7 (Distance à un hyperplan)**.** *Soient $(X,\vec{E},(.\mid.))$ un espace affine euclidien, $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de X, $\vec{N}$ une normale non nule à $\mathcal{H}$, $\vec{n}=\frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$, $O\in\mathcal{H}$ et $A\in X$. Alors $\forall M\in X$, $p^{\perp}_{\mathcal{H}}(M)=M-(\overrightarrow{OM}\mid\vec{n})\vec{n}$ et $s^{\perp}_{\mathcal{H}}(M)=M-2(\overrightarrow{OM}\mid\vec{n})\vec{n}$. Donc $d(A,\mathcal{H})=\frac{\left|(\overrightarrow{OA}|\vec{N})\right|}{\|\vec{N}\|}$.*

Corollaire 3.2.8. *Soient $(X,\vec{E},(.\mid.))$ un espace affine euclidien de dimension n muni d'un repère affine orthonormé $\mathcal{R}=(O,\mathcal{B})$, $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de X d'équation $u_1x_1+\cdots+u_nx_n+h=0$ et $A\in X$ de coordonnées $(a_1,\ldots,a_n)$. On a $d(A,\mathcal{H})=\frac{|u_1a_1+\cdots+u_na_n+h|}{\sqrt{u_1^2+\cdots+u_n^2}}$.*

Corollaire 3.2.9. *Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux hyperplans non parallèles d'un espace affine euclidien X. L'ensemble des points A de X tel que $d(A,\mathcal{H}_1)=d(A,\mathcal{H}_2)$ est la réunion de deux hyperplans orthogonaux, appelés les deux hyperplans bissecteurs de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$.*

Théorème 3.2.10 (Distance entre deux sous-espaces affines faiblement parallèles)**.** *Soient Y et Z deux sous-espaces d'un espace affine euclidien X tels que Y soit faiblement parallèle à Z. Alors pour tous $A,B\in Y$, $d(A,Z)=d(B,Z)$, d'où $d(Y,Z)=d(A,Z)$ pour $A\in Y$.*

Théorème 3.2.11 (Distance entre deux sous-espaces affines particuliers)**.** *Soient Y,Z deux sous-espaces affines d'un espace affine euclidien X. On suppose que $Y\cap Z=\emptyset$ et $\vec{Y}\cap\vec{Z}=\{\vec{0}\}$. Il existe un unique couple $(A,B)\in Y\times Z$ tel que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ soit orthogonal à la fois à $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$ et $d(Y,Z)=d(A,B)$.*

Corollaire 3.2.12. *Soient $(X,\vec{E},(.\mid.))$ un espace affine euclidien de dimension 3, $\mathcal{D}=A+\mathbb{R}\vec{u}$ et $\mathcal{D}'=A'+\mathbb{R}\vec{u}'$ deux droites disjointes non parallèles de X. On a $d(\mathcal{D},\mathcal{D}')=\frac{|[\vec{u},\vec{u}',\overrightarrow{AA'}]|}{\|\vec{u}\wedge\vec{u}'\|}$.*

3.3 Isométries affines euclidiennes.

Définition 3.3.1. Soit $(X, \vec{E}, +, (.\mid.))$ un espace affine euclidien. On appelle isométrie affine euclidienne (ou tout simplement isométrie affine) toute application $f : X \to X$ qui respecte les distances, c'et à dire $\forall A, B \in X,\ d(f(A), f(B)) = d(A, B)$.

Exemple 3.3.2. Les translations sont des isométries affines.

Proposition 3.3.3. *Soit $(X, \vec{E}, +, (.\mid.))$ un espace affine euclidien. Pour qu'une application $f : X \to X$ soit une isométrie il faut et il suffit que f soit affine avec sa partie linéaire $\vec{f}$ appartenant à $O(\vec{E})$.*

Exemple 3.3.4. Une symétrie orthogonale est une isométrie affine.

Définition 3.3.5.
1. On appelle retournement toute symétrie orthogonale par rapport à un espace de codimension 2.
2. Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan affine est appellée réflexion ou symétrie hyperplane.

Proposition 3.3.6. *Soit $(X, \vec{E}, +, (.\mid.))$ un espace affine euclidien. L'ensemble des isométries forment un groupe pour la composition noté $Isom(X)$. Une isométrie est dite positive si sa partie linéaire est une isométrie positive. Les isométries positives forment un sous-groupe de $Isom(X)$ noté $Isom^+(X)$.*

Proposition 3.3.7. *Pour tout couple de repères affines orthonormés $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ d'un espace affine euclidien, il existe une unique isométrie affine envoyant $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}'$. Si de plus les repères affines ont la même orientation, alors cette isométrie est directe.*

Lemme 3.3.8. *Soient $\vec{E}$ un espace euclidien et $\vec{f} \in O(\vec{E})$. Alors $Ker(\vec{f} - id_{\vec{E}})^{\perp} = Im(\vec{f} - id_{\vec{E}})$ et $\vec{E} = Ker(\vec{f} - id_{\vec{E}}) \oplus Im(\vec{f} - id_{\vec{E}})$.*

Théorème 3.3.9 (Structure)**.** *Toute isométrie f d'un espace affine euclidien s'écrit de manière unique sous la forme $f = t_{\vec{v}} \circ g$ avec*
1. *$\vec{f}(\vec{v}) = \vec{g}(\vec{v}) = \vec{v}$ ce qui équivant à $t_{\vec{v}} \circ g = g \circ t_{\vec{v}}$.*
2. *g est une isométrie qui a un point fixe.*

Théorème 3.3.10. *Le groupe des isométries affines d'un espace affine euclidien est engendré par les réflexions.*

Classification des isométries en dimension 2. Soit $(X, \vec{E}, +, (.\mid.))$ un espace affine euclidien de dimension 2.
1. Si f est une isométrie directe de X, alors $\vec{f} \in SO(\vec{E})$.
   - Si $\vec{f} = id_{\vec{E}}$, alors f est une translation.
   - Si $\vec{f} \neq id_{\vec{E}}$, alors $\mathrm{Ker}(\vec{f} - id_{\vec{E}}) = \{0\}$, donc f admet un unique point fixe noté A. L'isométrie f est une rotation centrée en A.
2. Si f est une isométrie négative, alors $\vec{f}$ est la symétrie orthogonale par rapport à $\vec{F} = \mathrm{Ker}(\vec{f} - id_{\vec{E}})$. Donc $f = t_{\vec{v}} \circ g$ avec $\vec{v} \in \vec{F}$ et g a un point fixe A. On note D la droite $D = A + \vec{F}$.
   - Si $\vec{v} = \vec{0}$, alors f est la symétrie orthogonale par rapport à D.
   - Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors f est une symétrie glissée ou symétrie translation.

Classification des isométries en dimension 3. Soit $(X, \vec{E}, +, (.\mid.))$ un espace affine euclidien de dimension 3.
1. Si f est une isométrie directe de X, alors $\vec{f} \in SO(\vec{E})$ et est donc une rotation d'axe $\vec{\Delta} = \mathrm{Ker}(\vec{f} - id_{\vec{E}})$.
   - Si f a un point fixe A, alors f est une rotation d'axe $A + \vec{\Delta}$.
   - Si f n'a pas de point fixe, alors $f = t_{\vec{v}} \circ g$ où g a un point fixe noté A.
     — Si $g = id_X$, alors f est une translation.
     — Si $g \neq id_X$, alors g est une rotation centrée en A et d'axe $A + \vec{\Delta}$. L'isométrie f est appelée vissage.
2. Si f est une isométrie négative, alors $\vec{f} \in O(\vec{E}) \setminus SO(\vec{E})$.
   - Si f a un point fixe A, alors f est soit la symétrie orthogonale par rapport à un plan affine passant par A ou la composée d'une rotation d'axe Δ par la symétrie par rapport au plan perpendiculaire à Δ en A.
   - Si f n'a pas de point fixe, alors $f = t_{\vec{v}} \circ g$ où g a un point fixe. Remarquons que $\vec{v}$ est non nul et $\mathrm{Ker}(\vec{g} - id_{\vec{E}}) \neq \{0\}$, donc $\dim \mathrm{Ker}(\vec{g} - id_{\vec{E}}) = 2$ et $\vec{g}$ est la symétrie par rapport à un hyperplan vectoriel. Ainsi f est une symétrie glissée.

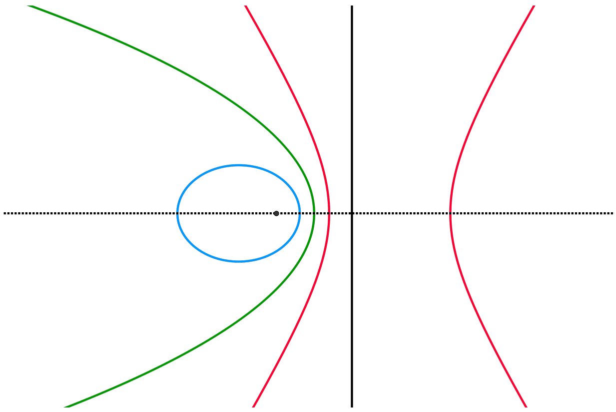
Chapitre 4

Coniques et quadriques

4.1 Coniques

On se place dans un plan affine euclidien X.

Définition 4.1.1. Soient F un point, $\mathcal{D}$ une droite ne passant pas par F et $e > 0$ un réel. On appelle conique de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e, l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan vérifiant $d(M,F) = e\, d(M,\mathcal{D})$. On distingue trois cas : $\mathcal{C}$ est une ellipse ssi $0 < e < 1$, $\mathcal{C}$ est une parabole ssi $e = 1$, et $\mathcal{C}$ est une hyperbole ssi $e > 1$.



Théorème 4.1.2. *Soit $\mathcal{C}$ une conique de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e et notons $d = d(F,\mathcal{D})$. Dans un repère orthonormal $(F,\vec{i},\vec{j})$, choisi tel que la droite $\mathcal{D}$ ait pour équation $x = d$, la conique $\mathcal{C}$ est une courbe ayant :*

1. *une équation cartésienne $x^2 + y^2 = e^2(x-d)^2$,*
2. *et deux équations polaires $r(\theta) = \frac{ed}{1+e\cos\theta}$ et $r(\theta) = \frac{ed}{e\cos\theta - 1}$ (le réel $p = ed$ est appelé paramètre de la conique).*

Théorème 4.1.3. *Soit $\mathcal{P}$ la parabole de paramètre p. Il existe un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ dans lequel $\mathcal{P}$ a pour équation $y^2 = 2px$ (dans ce cas $\overrightarrow{OF} = \frac{p}{2}\vec{u}$ et $\mathcal{D} : x = -\frac{p}{2}$).*

Théorème 4.1.4. *Soit $\mathcal{E}$ une ellipse. Il existe un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ dans lequel $\mathcal{E}$ a pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.*
Réciproquement, la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $0 < b < a$ est l'ellipse de foyer $F = O + c\vec{i}$, de directrice $\mathcal{D} : x = \frac{a^2}{c}$ et d'excentricité $e = \frac{c}{a}$ où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Corollaire 4.1.5. *Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans le repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec $0 < b < a$. Posons $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.*

1. *Les axes $O + \mathbb{R}\vec{i}$ et $O + \mathbb{R}\vec{j}$ sont des axes de symétrie de $\mathcal{E}$. L'axe $O + \mathbb{R}\vec{i}$ est appelé axe focal de l'ellipse. Les intersections de $\mathcal{E}$ avec ces axes s'appellent les sommets de $\mathcal{E}$.*
2. *Le point O est le centre de symétrie de $\mathcal{E}$ appelé centre de l'ellipse.*
3. *L'ellipse $\mathcal{E}$ admet deux foyers $F = O + c\vec{i}$ et $F' = O - c\vec{i}$ et deux directrices $\mathcal{D} : x = \frac{a^2}{c}$ et $\mathcal{D}' : x = -\frac{a^2}{c}$.*

Théorème 4.1.6. *Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole. Il existe un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ dans lequel $\mathcal{H}$ a pour équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.*
Réciproquement la courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une hyperbole de foyer $F = O - c\vec{i}$, de directrice $\mathcal{D} : x = -\frac{a^2}{c}$ et d'excentricité $e = \frac{c}{a}$ où $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Corollaire 4.1.7. *Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ dans le repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$. Posons $c=\sqrt{a^2+b^2}$.*

1. *Les axes $O+\mathbb{R}\vec{i}$ et $O+\mathbb{R}\vec{j}$ sont des axes de symétrie de $\mathcal{H}$. L'axe $O+\mathbb{R}\vec{i}$ est appelé axe focal de l'hyperbole. Il coupe $\mathcal{H}$ en deux points A et A' appelés sommets de l'hyperbole.*
2. *Le point O est le centre de symétrie de $\mathcal{H}$ appelé centre de l'hyperbole.*
3. *L'hyperbole $\mathcal{H}$ admet deux foyers $F=O+c\vec{i}$ et $F'=O-c\vec{i}$ et deux directrices $\mathcal{D}: x=\frac{a^2}{c}$ et $\mathcal{D}': x=-\frac{a^2}{c}$.*
4. *L'hyperbole admet deux asymptotes $\Delta: y=\frac{b}{a}x$ et $\Delta': y=-\frac{b}{a}x$.*

Théorème 4.1.8. *(Définition bifocale) Soient F et F' deux points distincts et $a>\frac{d(F,F')}{2}$ un réel. L'ensemble $\mathcal{E}$ des points M tel que $d(M,F)+d(M,F')=2a$ est une ellipse de foyers F et F'.*

Théorème 4.1.9. *(Définition bifocale) Soient F et F' deux points distincts et $0<a<\frac{d(F,F')}{2}$ un réel. L'ensemble $\mathcal{H}$ des points M tel que $|d(M,F)-d(M,F')|=2a$ est une hyperbole de foyers F et F'.*

Proposition 4.1.10. *Une parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y^2=2px$ est paramétrée par la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathcal{P}$ définie par $f(t)=(p\frac{t^2}{2},pt)$.*

Proposition 4.1.11. *Une ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ est paramétrée par la fonction $f:[0,2\pi[\to\mathcal{E}$ définie par $f(t)=(a\cos t,b\sin t)$.*

Proposition 4.1.12. *Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Un paramétrage de la branche*

1. *$\mathcal{H}_{x\geq a}$ est $f:\mathbb{R}\to\mathcal{H}_{x\geq a}$ définie par $f(t)=(a\,ch(t),b\,sh(t))$.*
2. *$\mathcal{H}_{x\leq -a}$ est $f:\mathbb{R}\to\mathcal{H}_{x\leq -a}$ définie par $f(t)=(-a\,ch(t),b\,sh(t))$.*

Un paramétrage rationnel de $\mathcal{H}$ est $g:\mathbb{R}^*\to\mathcal{H}$ définie par $g(u)=(\frac{a}{2}(u+\frac{1}{u}),\frac{b}{2}(u-\frac{1}{u}))$.

Théorème 4.1.13 (Poncelet)**.** *La tangente en M à une ellipse de foyer F et F' est la perpendiculaire à la bissectrice de l'angle $\widehat{FMF'}$.*

Théorème 4.1.14 (Poncelet)**.** *La tangente en M à une hyperbole de foyer F et F' est la bissectrice de l'angle $\widehat{FMF'}$.*

4.2 Détermination d'une conique

Définition 4.2.1. Soient $\mathcal{R}=(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère de X et $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+k$ un polynôme de degré 2. On note $\mathcal{C}$ la courbe définie par $\mathcal{C}=\{M\in X\mid f(x_M,y_M)=0\}$ et on l'appelle conique. On appelle $ax^2+2bxy+cy^2$, la partie quadratique de l'équation de matrice $Q=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix}$ et $dx+ey$, la partie linéaire de l'équation de matrice $L=(d\quad e)$. On a $M\in\mathcal{C}\Leftrightarrow {}^t[M]_{\mathcal{R}}Q[M]_{\mathcal{R}}+L[M]_{\mathcal{R}}+k=0$.

Remarque 4.2.2.

1. Soit Ω un point de X de coordonnées (x_Ω,y_Ω) dans le repère $\mathcal{R}$. Considérons le repère $\mathcal{R}'=(\Omega,\vec{i},\vec{j})$. On a $M\in\mathcal{C}\Leftrightarrow f(x_M,y_M)=0\Leftrightarrow f(x'_M+x_\Omega,y'_M+y_\Omega)=0$ où (x'_M,y'_M) sont les coordonnées de M dans $\mathcal{R}'$. L'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}'$ est $f(x_\Omega+x',y_\Omega+y')=f(x_\Omega,y_\Omega)+x'\frac{\partial f}{\partial x}(x_\Omega,y_\Omega)+y'\frac{\partial f}{\partial y}(x_\Omega,y_\Omega)+ax'^2+2bx'y'+cy'^2$. On remarque que la partie quadratique est invariante par changement de centre du repère. L'idée est de choisir si possible une origine Ω dont les coordonnées annulent les dérivées partielles.
2. Un point Ω est un centre de symétrie de $\mathcal{C}$ ssi $\forall(x',y')\in\mathbb{R}^2, f(x_\Omega+x',y_\Omega+y')=f(x_\Omega-x',y_\Omega-y')$ ssi $\frac{\partial f}{\partial x}(x_\Omega,y_\Omega)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_\Omega,y_\Omega)=0$, c'est à dire $2Q\begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega\end{pmatrix}=-{}^tL$.
   - Si $\mathrm{rg}(Q)=2$, alors la courbe admet un et un seul centre de symétrie.
   - Si $\mathrm{rg}(Q)=1$, alors la courbe n'admet aucun centre ou admet une infinité de centres.
3. Supposons la base $(\vec{i},\vec{j})$ est orthonormée. Il existe une matrice de rotation P telle que ${}^tPQP=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu\end{pmatrix}=D$. En notant (x'',y'') les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}_{O,\vec{u},\vec{v}}$ nous obtenons $M\in\mathcal{C}\Leftrightarrow\lambda x''^2+\mu y''^2+d_1x''+e_1y''+k=0$.
4. De ces remarques, on déduit une méthode de détermination des coniques.
   (a) $\mathrm{rg}(Q)=2$.
      i. On détemine l'unique centre de symétrie Ω.
      ii. On cherche une base orthonormée de vecteurs propres $(\vec{u},\vec{v})$ de Q.
      iii. L'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ est $\lambda x^2+\mu y^2+f(x_\Omega,y_\Omega)=0$.

(b) $\mathrm{rg}(Q) = 1$.

i. On cherche une base orthonormée de vecteurs propres $(\vec{u}, \vec{v})$ de Q.

ii. L'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est $\lambda x^2 + d_1 x + e_1 y + k = 0$.

iii. Par mise sous forme canonique du trinôme, on se ramène à une équation du type $\lambda x'^2 + e_2 y = 0$.

(c) On obtient donc des équations du type :

$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$, une ellipse, $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 0$, un point, $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = -1$, le vide,

$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$, une hyperbole, $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 0$, deux droites concourantes,

$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y}{B} = 0$, une parabole,

$\frac{x^2}{A^2} = 1$, deux droites parallèles, $\frac{x^2}{A^2} = 0$, une droite, $\frac{x^2}{A^2} = -1$, le vide.

Exemple 4.2.3.

1. La courbe définie par l'équation $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 10x - 2y + 1 = 0$ est une ellipse.
2. La courbe définie par l'équation $x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{3}xy + \sqrt{3}x - y + 8 = 0$ est une parabole.

4.3 Quadriques

On se place dans un espace affine euclidien X de dimension 3 muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Définition 4.3.1. On considère un polynôme de degré 2, $f(x,y,z) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2bxy + 2b'xz + 2b''yz + cx + c'y + c''z + d$. On note $\mathcal{S}$ la surface définie par $\mathcal{S} = \{M \in X \mid f(x_M, y_M, z_M) = 0\}$ et on l'appelle quadrique. On appelle $ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2bxy + 2b'xz + 2b''yz$ la partie quadratique de l'équation de matrice $Q = \begin{pmatrix} a & b & b' \\ b & a' & b'' \\ b' & b'' & a'' \end{pmatrix}$. On appelle $cx + c'y + c''z$ la partie linéaire de l'équation de matrice $L = (c\ c'\ c'')$. Par conséquent $M \in \mathcal{S} \Leftrightarrow {}^t[M]_{\mathcal{R}} Q [M]_{\mathcal{R}} + L[M]_{\mathcal{R}} + d = 0$.

Remarque 4.3.2.

1. La matrice Q étant symétrique, il existe une base orthonormale $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de $\vec{X}$ formée de vecteurs propres. L'équation de la surface $\mathcal{S}$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ devient $\lambda x'^2 + \mu y'^2 + \nu z'^2 + \alpha x' + \beta y' + \gamma z' + d = 0$, où λ, μ et ν sont les valeurs propres de Q.
2. Un point Ω est centre de symétrie de la surface $\mathcal{S}$ ssi $\forall x', y', z' \in \mathbb{R},\ f(x_\Omega + x', y_\Omega + y', z_\Omega + z') = f(x_\Omega - x', y_\Omega - y', z_\Omega - z')$ ssi $\frac{\partial f}{\partial x}(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega) = \frac{\partial f}{\partial z}(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega) = 0$ ssi $2Q \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \\ z_\Omega \end{pmatrix} = -{}^tL$. On peut faire une discussion suivant le rang de Q.
   - Si $\mathrm{rg}\, Q = 3$, il y a un unique centre de symétrie.
   - Si $\mathrm{rg}\, Q = 2$, il y a une infinité de centres formant une droite ou aucun centre.
   - Si $\mathrm{rg}\, Q = 1$, il y a une infinité de centres formant un plan ou aucun centre.
3. Modulo le raisonnement précédent et l'utilisation de formes canoniques de trinômes du second degré, il existe un repère orthonormé dans lequel la surface $\mathcal{S}$ admet une équation réduite. Il y a notamment neuf surfaces intéressantes.

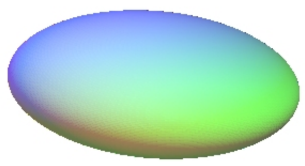
L'ellipsoïde	:	$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1.$
L'hyperboloïde à une nappe	:	$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 1.$
L'hyperboloïde à deux nappes	:	$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 1.$
Le cône	:	$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \frac{z^2}{C^2}.$
Le paraboloïde elliptique	:	$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \frac{z}{C}.$
Le paraboloïde hyperbolique	:	$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = \frac{z}{C}.$
Le cylindre elliptique	:	$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$
Le cylindre hyperbolique	:	$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1.$
Le cylindre parabolique	:	$\frac{x^2}{A^2} = \frac{y}{B}.$

   Dans les autres cas la surface $\mathcal{S}$ est dite dégénérée.

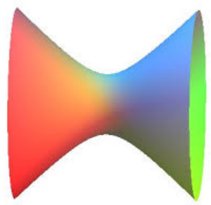
   (a) $x^2 + y^2 + z^2 = -1$, $x^2 + y^2 = -1$, $x^2 = -1$, la surface $\mathcal{S}$ est vide.

   (b) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $x^2 + y^2 = 0$, $x^2 = 0$, la surface $\mathcal{S}$ est un point, une droite, un plan.

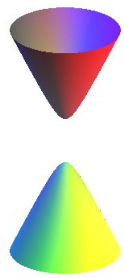
   (c) $x^2 - y^2 = 0$, $x^2 = 1$, la surface $\mathcal{S}$ est une réunion de deux plans sécants, parallèles.



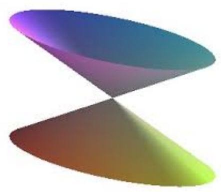
Ellipsoïde



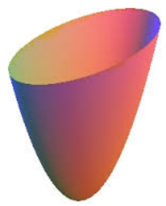
Hyperboloïde à une nappe



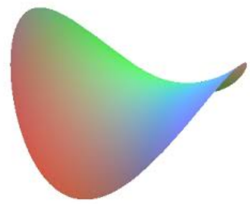
Hyperboloïde à deux nappes



Cône

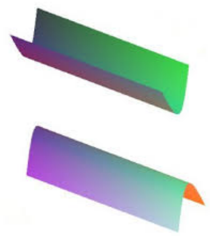


Paraboloïde elliptique

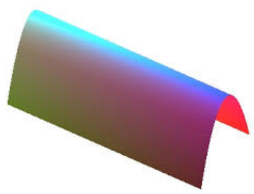


Paraboloïde hyperbolique

Cylindre elliptique



Cylindre hyperbolique



Cylindre parabolique

Exemple 4.3.3.

1. La surface définie par $xy+yz+zx+2y+1=0$ est une hyperboloïde à une nappe.
2. La surface définie par $7x^2-2y^2+4z^2+4xy+20xz+16yz-36x+72y-108z+36=0$ est un paraboloïde hyperbolique.