UNIVERSITE SAVOIE MONT-BLANC — Année 2017-2018

MATH 700

PROBLÈMES D'ALGÈBRE LINÉAIRE

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un K-espace vectoriel de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\varphi_u : K[X] \to \mathcal{L}(E)$ le morphisme de K-algèbres défini par $\varphi_u(P) = P(u)$.

   (a) Montrer que $Ker(\varphi_u)$ est un idéal de $K[X]$ non réduit à $\{0\}$.
   Un élément de $Ker(\varphi_u)$ est dit polynôme annulateur de u.

   (b) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $Q_u \in K[X]$ qui divise tout élément de $Ker(\varphi_u)$. Le polynôme Q_u est dit le polynôme minimal de u.

   (c) Soient $Q_1, Q_2 \in K[X]$ deux polynômes premiers entre eux.

      i. Montrer que $Ker(Q_1(u)) + Ker(Q_2(u)) \subseteq Ker((Q_1Q_2)(u))$.

      ii. Utiliser le théorème de Bezout, pour montrer que
      $Ker((Q_1Q_2)(u)) \subseteq Ker(Q_1(u)) + Ker(Q_2(u))$.

      iii. Montrer que $Ker((Q_1Q_2)(u)) = Ker(Q_1(u)) \bigoplus Ker(Q_2(u))$.

   (d) Soient $Q_1, ..., Q_m \in K[X]$ des polynômes premiers entre eux deux à deux. Montrer que $Ker((Q_1...Q_m)(u)) = Ker(Q_1(u)) \bigoplus ... \bigoplus Ker(Q_m(u))$.

   (e) On suppose que u est diagonalisable. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_k$ les valeurs propres deux à deux distinctes de u. Montrer que $\prod\limits_{1 \le i \le k} (X - \lambda_i) \in Ker(\varphi_u)$.

   (f) Soient $a_1, ..., a_k$ des éléments deux à deux distincts de K et $P = \prod\limits_{1 \le i \le k} (X - a_i)$.
   On suppose que $P \in Ker(\varphi_u)$. Montrer que u est diagonalisable.

   (g) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable.

   (h) Montrer que si $P \in Ker(\varphi_u)$ et si λ est une valeur propre de u, alors $P(\lambda) = 0$. Que peut-on déduire ?

   (i) On suppose que u est diagonalisable. Donner le polynôme minimal Q_u.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

   (a) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

      i. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si g commute avec f, alors $Ker(g)$, $Im(g)$ et les sous-espaces propres de g sont stables par f.

      ii. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $Ker(P(f))$ est stable par f.

      iii. Montrer que si $F_1, ..., F_p$ sont p sous-espaces vectoriels de E stables par f, alors $\bigcap\limits_{1 \le k \le p} F_k$ et $\sum\limits_{1 \le k \le p} F_k$ sont stables par f.

iv. Montrer que si $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont p réels et si $n_1, ..., n_p$ sont p entiers naturels, alors $\sum_{1\leq k\leq p} Ker(f-\lambda_k Id_E)^{n_k}$ est stable par f.

v. Que peut-on dire des droites de E stables par f ?

vi. Montrer que si toutes les droites de E sont stables par f, alors f est une homothétie.

vii. Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ne laissant stable que les sous-espaces $\{0\}$ et $\mathbb{R}^2$.

(b) Soit $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X])$ qui à tout polynôme associe son polynôme dérivé.

i. L'endomorphisme D est-il diagonalisable ?

ii. Montrer que les sous-espaces vectoriels propres de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ stables par D sont $\{0\}, \mathbb{R}_0[X], \mathbb{R}_1[X], ..., \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

3. Le but de ce problème est de démontrer le théorème de Cayley-Hamilton.

(a) Soient $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par u, et v la restriction de u à F.

i. Soient $\mathcal{B}$ une base de F et $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Donner la forme de la matrice de u dans la base $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$.

ii. En déduire que P_v divise P_u.

(b) Soient $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ et $F_u(x) = \{P(u)(x) \ / \ P \in \mathbb{R}[X]\}$.

i. Montrer que $F_u(x)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par u.

ii. Montrer l'existence d'un plus petit entier naturel q pour lequel la famille de vecteurs $\{x, u(x), ..., u^q(x)\}$ est liée.

iii. Soient $a_0, a_1, ..., a_q \in \mathbb{R}$ non tous nuls telle que $\sum_{j=0}^{q} a_j u^j(x) = 0$.

Montrer que $a_q \neq 0$.

iv. Montrer, par récurrence, que, pour tout entier $m \geq q$, $u^m(x)$ s'écrit comme une combinaison de $x, u(x), ..., u^{q-1}(x)$.

v. En déduire que $\{x, u(x), ..., u^{q-1}(x)\}$ est une base de $F_u(x)$.

vi. On note v la restriction de u à $F_u(x)$ et, pour tout $0 \leq i \leq q$, $\alpha_i = \dfrac{a_i}{a_q}$.

Écrire la matrice de v dans la base $\{x, u(x), ..., u^{q-1}(x)\}$.

vii. Montrer que $P_v(X) = (-1)^q \sum_{j=0}^{q} \alpha_j X^j$.

viii. Montrer que $P_v(u)(x) = 0$.

ix. En déduire que $P_u(u) = 0$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout polynôme unitaire $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$ de $K_n[X]$, on associe la matrice compagnon de $\mathcal{M}_n(K)$

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Soit $Q = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$ un polynôme de $K_n[X]$ et C_Q sa matrice compagnon associée.

(a) Montrer que le polynôme caractéristique de C_Q est $(-1)^n Q$.

(b) Soit $R \in K_n[X]$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur R pour qu'il existe une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$ dont le polynôme caractéristique est R.

(c) Déterminer un entier m et une matrice $A \in \mathcal{M}_m(K)$ vérifiant : $A^{2018} = A^{2017} + A^{2016} + 2015\, I_m$.

(d) Montrer que C_Q est inversible ssi $Q(0) \neq 0$.

(e) Soit $\lambda \in Spec({}^tC_Q)$. Déterminer le sous-espace propre de ${}^tC_Q$.

(f) Montrer que ${}^tC_Q$ est diagonalisable ssi Q est scindé à racines simples.

(g) On suppose que Q admet n racines disctinctes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Montrer que le détermiment de la matrice suivante (dite de Vandermonde) est non nul

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & ... & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Calculer de deux manières différentes ce détermiment.

5. (a) Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ suivante

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i. Calculer J^p pour tout $1 \leq p \leq n$. En déduire que J est diagonalisable

ii. Donner les valeurs propres de J ainsi que son polynôme minimal.

iii. Montrer que $I_n, J, ..., J^{n-1}$ sont linéairement indépendants.

iv. Diagonaliser J en exhibant une matrice de passage.

(b) Soit A la matrice circulante complexe suivante

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_3 & a_4 & \ldots & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

i. Exprimer A comme polynôme en la matrice J.

ii. Montrer que pour tout polynôme complexe Q, la matrice $Q(J)$ est diagonalisable et $Spec(Q(J)) = \{Q(\lambda) \ / \ \lambda \in Spec(J)\}$.

iii. En déduire que A est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

iv. Calculer le déterminant de A.

6. (a) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et u un endomorphisme de E qui vérifie $u^2 + \alpha \ id_E = 0_E$.

i. Montrer que u n'est pas diagonalisable.

ii. Calculer $det^2(u)$. En déduire que n est pair.

iii. Soit x un vecteur non nul de E. Montrer que x et $u(x)$ ne sont pas colinéaires et que le plan vectoriel $\text{Vect}\{x, u(x)\}$ est stable par u.

iv. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que si x est un vecteur non nul de E, alors, soit $\text{Vect}\{x, u(x)\}$ est contenu dans F, soit $\text{Vect}\{x, u(x)\}$ et F sont en somme directe.

v. Montrer qu'il existe $x_1, ..., x_m \in E$ tel que $\mathcal{B} = \{x_1, u(x_1), ..., x_m, u(x_m)\}$ est une base de E. Donner la matrice de u dans $\mathcal{B}$.

(b) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique (c.à.d. ${}^tA = -A$) et $B = A^2$.

i. Montrer que B est une matrice symétrique et que ses valeurs propres sont réelles négatives ou nulles.

ii. Soit λ une valeur propre non nulle de B. Montrer qu'il existe $X_{\lambda,1}, ..., X_{\lambda,r_\lambda} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{B}_\lambda = \{X_{\lambda,1} \ , \ AX_{\lambda,1} \ , \ \ldots \ , \ X_{\lambda,r_\lambda} \ , \ AX_{\lambda,r_\lambda}\}$ est une base de E_λ.

iii. Soit $\mathcal{B}_0$ une base de E_0 et $\lambda_1, ..., \lambda_k$ les valeurs propres distincts non nuls de B. Montrer que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \bigcup \bigcup\limits_{1 \leq i \leq k} \mathcal{B}_{\lambda_i}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

iv. Écrire la matrice A dans la base $\mathcal{B}$.

v. Donner le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.

vi. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

vii. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

7. Soient $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, E un K-espace vectoriel de dimension n, et $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ une base de E.

   Pour tout $\sigma \in S_n$, on note f_σ l'endomorphisme de E définie par :

$$\forall\, 1 \le i \le n, \quad f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$$

   On note :

   - $s = \sum_{1 \le i \le n} e_i$.
   - D la droite vectorielle engendrée par s.
   - H l'hyperplan d'équation $\sum_{1 \le i \le n} x_i = 0$.
   - $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels F de E tels que, $\forall\, \sigma \in S_n$, $f_\sigma(F) \subseteq F$.

   (a) i. Pour $n = 2$ et 3, donner les matrices des f_σ dans la base $\mathcal{B}$.
      ii. Montrer que les f_σ sont automorphismes.
      iii. Montrer que $\{f_\sigma \mid \sigma \in S_n\}$ muni de la composition est un groupe.
      iv. Montrer que les f_σ n'ont pas 0 comme valeur propre.
      v. Montrer que, pour tout $\sigma \in S_n$, $(f_\sigma)^{n!} = id_E$.
      vi. Quelles sont les valeurs propres possibles des f_σ ?
      vii. Montrer que les f_σ sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$.
      viii. Donner l'exemple d'un f_σ non diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

   (b) i. Donner une base de H.
      ii. Montrer que $D \in \mathcal{F}$ et $H \in \mathcal{F}$.
      iii. D et H sont-ils supplémentaires dans E ?
      iv. Soient $p = \dfrac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$ et $x = \sum_{1 \le i \le n} x_i e_i \in E$.
         (α) Soient $1 \le i, j \le n$. Trouver le nombre de $\sigma \in S_n$ tel que $\sigma(i) = j$.
         (β) Calculer pour $1 \le k \le n$, $\sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma^{-1}(k)}$.
         (γ) Écrire $p(x)$ sur la base $\mathcal{B}$.
         (δ) En déduire que p est le projecteur sur D parallèlement à H.

   (c) Soit $F \in \mathcal{F}$ tel que $F \not\subseteq D$.
      i. Montrer qu'il existe $x = \sum_{1 \le i \le n} x_i e_i \in F$ tel que $\exists\, 1 \le i < j \le n$, $x_i \neq x_j$.
      ii. Soit $2 \le k \le n$. Montrer qu'il existe $y \in E$ tel que $x_i e_1 + x_j e_k + y \in F$ et $x_j e_1 + x_i e_k + y \in F$
      iii. Montrer que $\forall\, 2 \le k \le n$, $e_1 - e_k \in F$.
      iv. En déduire que $H \subseteq F$.
      v. Montrer que $\mathcal{F} = \{\{0\}, D, H, E\}$.

8. Le but de ce problème est d'étudier les matrices symétriques définies positives.

- Pour tout $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $1 \leq k \leq n$, on note M_k la matrice $(m_{ij})_{1\leq i,j\leq k} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.
- On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques.
- On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices définies positives c'est à dire $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ssi $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}\}$, ${}^tXAX > 0$.

(a) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

i. $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

ii. Les valeurs propres de A sont strictement positives.

iii. $\exists\ P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = {}^tPP$.

(b) Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $1 \leq k \leq n$. En écrivant $A = \begin{pmatrix} A_k & V \\ {}^tV & B \end{pmatrix}$ où $V \in \mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{R})$, montrer que si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $A_k \in \mathcal{S}_k^{++}(\mathbb{R})$ et donc $\det(A_k) > 0$.

(c) Soit $A \in \mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} {}^tQ & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & C \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Étant donné $m \in \mathbb{N}^*$, $\alpha, \alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}$, on considère la matrice M de $\mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & ... & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 & \alpha_m \\ \alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_m & \alpha \end{pmatrix}.$$

i. Montrer, par récurrence sur m, que $\det(M) = \alpha - \sum_{1\leq i\leq m} \alpha_i^2$.

ii. Pour $X \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$, expliciter ${}^tXMX$ en fonction des composantes de X et en déduire que si $\det(M) > 0$, alors $M \in \mathcal{S}_{m+1}^{++}(\mathbb{R})$.

(e) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si pour tout $1 \leq k \leq n$, $\det(A_k) > 0$, alors $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

(f) Que peut-on déduire ?

9. (a) On appelle matrice de Hessenberg irréductible toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui satisfait : $\forall\, 1 \leq j < i-1 \leq n-1$, $a_{ij} = 0$ et $\forall\, 2 \leq i \leq n$, $a_{i,i-1} \neq 0$.

   i. Soit $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \ldots - a_1 X - a_0 \in \mathbb{C}[X]$. Construire une matrice de Hessenberg irréductible qui admet $(-1)^n P$ pour polynôme caractéristique.

   ii. Montrer que si A est une matrice de Hessenberg irréductible, alors pour toute valeur propre λ de A, l'espace propre associé est de dimension 1.

   iii. Démontrer que les valeurs propres d'une matrice de Hessenberg irréductible sont simples si et seulement si la matrice est diagonalisable.

   (b) Nous supposons maintenant que la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est tridiagonale, symétrique et irréductible, c'est à dire

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 & & \vdots \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

   avec $\forall\, 1 \leq i \leq n-1$, $b_i \neq 0$.

   i. Montrer que les valeurs propres de A sont simples.

   ii. Décrire un algorithme de calcul d'un espace propre de A.

   (c) Soit maintenant une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tridiagonale, c'est à dire

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & 0 & & \vdots \\ 0 & c_3 & a_3 & b_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_n & a_n \end{pmatrix}.$$

   i. Proposer un algorithme de calcul du polynôme caractéristique de A.

   ii. Vérifier que A admet les mêmes valeurs propres que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & c_2 b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & c_3 b_2 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & a_3 & b_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & c_n b_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}$$

   iii. Montrer que si $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et si $c_{i+1}b_i \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$, alors A admet n valeurs propres réelles simples et est diagonalisable.

   iv. Que peut-on dire si $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et si $c_{i+1}b_i \in \mathbb{R}_-^*$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$?