

Introduction à la logique

TD 3 : déduction naturelle, logique propositionnelle

Pierre Hyvernât
Institut mathématique de Luminy
bureau 230
téléphone : 04 91 26 96 59
email : hyvernât@iml.univ-mrs.fr
<http://iml.univ-mrs.fr/~hyvernât/enseignement.html>

Exercice 1 : donnez une définition « cumulative » de l'ensemble des démonstrations ; déduisez-en une notion de profondeur pour une démonstration. Donnez une définition équivalente de cette profondeur par récurrence sur la démonstration.

Exercice 2 : donnez une démonstration des formules suivantes :

- $A \rightarrow A$;
- $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ et $A \rightarrow (B \rightarrow B)$;
- $A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$;
- $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow B \rightarrow C$;
- $(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow A \rightarrow C)$;
- $\neg F \rightarrow (F \rightarrow \perp)$ et $(F \rightarrow \perp) \rightarrow \neg F$.

Exercice 3 : démontrez que les règles suivantes sont dérivables :

- $\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma, A \vdash B} \rightarrow$ réversible ;
- $\frac{\Gamma, F \vdash G \quad \Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash G}$ coupure ;
- Si « $\vdash A \rightarrow B$ » : $\frac{\Gamma, B \vdash F}{\Gamma, A \vdash F}$.

Exercice 4 : démontrez les séquents et les règles dérivées :

- $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (A \wedge B) \rightarrow C$ et $(A \wedge B) \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$;
- $\frac{\Gamma, A \vdash F \quad \Gamma, B \vdash F}{\Gamma, A \vee B \vdash F}$;
- $\frac{\Gamma, A, B \vdash F}{\Gamma, A \wedge B \vdash F}$.

Exercice 5 : (lois de de Morgan) Démontrez les séquents suivants (plus ou moins par ordre croissant de difficulté) :

- $A \vdash \neg\neg A$;
- $\neg\neg A \vdash A$;
- $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$;
- $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$;
- $\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$;
- $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$.

Pour les preuves *a*, *c*, *d* et *e*, n'utilisez pas le raisonnement par l'absurde.

Exercice 6 : donnez une démonstration des formules suivantes :

- le tiers exclu : $A \vee \neg A$;
- la loi de Pierce : $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$.

Pour le tiers exclu, utilisez les exercices 3 et 4 ; la loi de Pierce est plus difficile...