

# info602 : théorie des graphes et algorithmes sur les graphes

## TD 1 : graphes et arbres, définitions et représentations

Pierre Hyvernats  
Laboratoire de mathématiques de l'université de Savoie  
bâtiment Chablais, bureau 22  
téléphone : 04 79 75 94 22  
email : Pierre.Hyvernats@univ-savoie.fr  
www : <http://www.lama.univ-savoie.fr/~hyvernats/>

*Question 0* : trouvez plusieurs exemples de graphes utilisés dans la vie de tous les jours. Est-ce que ces graphes sont

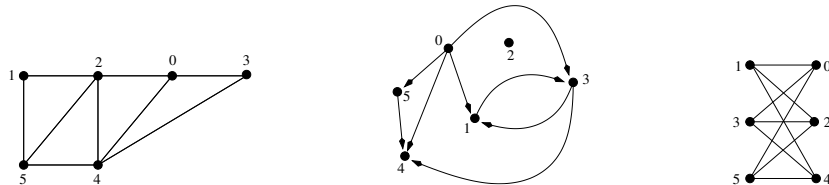
- orientés ?
- connexe ?
- acycliques ?

### Exercice 1 : représentations des graphes

*Question 1* : pour chacun des graphes suivants sur  $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , donnez la représentation sous les différentes formes données en cours :

- sous-ensembles de  $\mathcal{P}_2(S)$ ,
- relation
- liste d'adjacence,
- matrice d'adjacence,
- matrice d'incidence.

Une arête non-orientée peut être vue comme deux arêtes orientées : une dans chaque direction...



*Question 2* : donnez la représentation sous forme de matrice d'adjacence des graphes sur  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  représentés par les listes d'adjacences suivantes :

$$\begin{bmatrix} - \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 0, 2, 4 \\ 0, 1, 3 \\ 0, 2, 4 \\ 0, 1, 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 0, 2, 3, 4 \\ 0, 1, 3, 4 \\ 0, 1, 2, 4 \\ 0, 1, 2, 3 \end{bmatrix}$$

Dessinez les graphes correspondants et comparez vos résultats...

*Question 3* : écrivez un algorithme qui permettra de passer de la représentation d'un graphe sous forme de liste d'adjacence à une représentation en matrice d'adjacence.

Faites un autre algorithme pour la transformation inverse.

Que se passe-t-il si on applique le premier algorithme puis le second ?

### Exercice 2 : deux réunions mondaines

*Question 1* : montrez que dans toute soirée d'au moins 6 personnes, il y a soit 3 personnes qui se connaissent mutuellement, soit trois personnes qui ne se connaissent pas.

Reformulez le problème en utilisant le vocabulaire des graphes.

*Question 2* : M et Mme Durand invitent quatre autres couples pour le dîner. Lorsqu'elles se rencontrent pour la première fois, certaines personnes trinquent ensemble. En fin de soirée, M Durand demande à tout le monde combien de fois ils ont trinqué. Il obtient des réponses toutes différentes.

En sachant que personne n'a trinqué avec son conjoint, combien de fois M Durand a-t'il trinqué ? Et sa femme ?

### **Exercice 3 : graphes planaires et formule de Euler**

*Question 1* : un architecte veut construire trois maisons en face de trois bornes (eau, électricité et gaz). Pour des raisons pratiques, les canalisations d'eau, de gaz et d'électricité (??) ne peuvent pas se croiser. Comment l'architecte s'y prend-il pour positionner les trois maisons et les relier aux trois bornes ?

*Question 2* : un graphe est planaire si on peut le représenter dans le plan sans croisements entre les arêtes. Donnez un exemple de graphe planaire et un exemple de graphe non-planaire. Quelles difficultés rencontrez-vous ?

*Question 3* : soit  $G$  un graphe planaire connexe non vide. Démontrez que la formule suivante (formule d'Euler) est vraie

$$n + f = 2 + m$$

où  $n$  est le nombre de sommets,  $m$  le nombre d'arêtes et  $f$  le nombre de faces. (On compte également la face externe infinie...)

*Conseil* : procédez par induction sur  $m$ , le nombre d'arêtes.

*Question 4* : montrez que pour tout graphe planaire connexe sans boucle, si  $m > 1$  alors  $2m \geq 3f$ . En déduire que pour un tels graphe,  $m \leq 3n - 6$ .

Montrez que le graphe complet  $K_5$  (cinq sommets tous reliés les uns aux autres) n'est pas planaire.

*Question 5* : Que pensez-vous de la question 1 ?