Exercices d'informatique – Logique et λ-calcul

Tom Hirschowitz

STIC ISC – M1 – Série n° 2 – 2012/2013

Beaucoup d'exercices de cette feuille sont tirés de l'*Introduction à la logique* de David, Raffalli et Nour (Dunod, 2001).

Ex 1. Démontrer en déduction naturelle :

1. $((A \wedge B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \Rightarrow C)$,
2. $(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$,
3. $((C \Rightarrow A) \vee (C \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \Rightarrow (A \vee B))$,
4. $((\forall x, A) \vee (\forall x, B)) \Rightarrow \forall x, (A \vee B)$,
5. $(\exists x, (A \wedge B)) \Rightarrow ((\exists x, A) \wedge (\exists x, B))$,
6. $\neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$.

Ex 2. Trouver l'erreur ou les erreurs dans les démonstrations suivantes.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vee B \vdash A \vee B}}{A \vee B \vdash A} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \vee B \vdash A \vee B}}{A \vee B \vdash B}}{A \vee B \vdash A \wedge B}}{\vdash (A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists x, A ; A \vdash A} \qquad \dfrac{}{\exists x, A ; A \vdash A}}{\exists x, A \vdash A}}{\exists x, A \vdash \forall x, A}}{\vdash \exists x, A \Rightarrow \forall x, A}$$

On pose ensuite $F = \exists x, A \wedge \exists x, B$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists x, A \vdash \exists x, A}}{\exists x, A \vdash A}}{\exists x, A \vdash \forall x, A}}{\vdash \exists x, A \Rightarrow \forall x, A}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F \vdash F}}{F \vdash \exists x, A} \qquad \dfrac{}{F, A \vdash A}}{F \vdash A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F \vdash F}}{F \vdash \exists x, B} \qquad \dfrac{}{F, B \vdash B}}{F \vdash B}}{F \vdash A \wedge B}}{F \vdash \exists x, (A \wedge B)}}{\vdash \exists x, A \wedge \exists x, B \Rightarrow \exists x, (A \wedge B)}$$

Arithmétique de Peano

On reprend la signature du cours pour l'arithmétique dite de Peano : on a une constante 0, une opération unaire S pour le successeur, et deux opérations binaires, $+$ et $\times$. On a de plus le seul symbole de relation donné par l'égalité.

On appelle Peano la liste (en fait infinie) de formules suivante (on donne des explications sur la droite):

1. $\forall x, x = x$;
2. pour toute formule A, la formule $\forall x, y, A \Rightarrow (x = y) \Rightarrow A[x \mapsto y]$;

3. $\forall x, S(x) \neq 0$; 0 n'est pas un successeur.
4. $\forall x, y, (S(x) = S(y)) \Rightarrow (x = y)$; S est injective.
5. $\forall x, x + 0 = x$; Définition de $+$: cas 0.
6. $\forall x, y, x + S(y) = S(x + y)$; Définition de $+$: cas S.
7. $\forall x, x \times 0 = 0$; Définition de $\times$: cas 0.
8. $\forall x, y, x \times S(y) = x + (x \times y)$; Définition de $\times$: cas S.
9. le schéma de récurrence, i.e., pour toute formule A avec variables libres parmi $x_1, \dots, x_n, x$, $i \in n$, et $y \notin \{x_1, \dots, x_n\}$, la formule

$$\forall x_1, \dots, x_n, (\{F[x \mapsto 0] \wedge (\forall y, F[x \mapsto y] \Rightarrow F[x \mapsto S(y)])\} \Rightarrow \forall x, F),$$

qu'on note $\mathrm{Rec}_{F,x}$.

Les deux premières formules concernent l'égalité. Elles sont en général présentées comme parties intégrantes de la déduction naturelle. Les autres sont ce qu'on appelle l'arithmétique de Peano.

Dans les exercices suivants, on suppose toutes ces formules vraies, i.e., on les met implicitement à gauche de $\vdash$.

Ex 3. Prouver

- $\forall x, y, z, (x = y) \Rightarrow (y = z) \Rightarrow (x = z)$;
- $\forall x, y, (x = y) \Rightarrow (y = x)$.

Ex 4. Démontrer $\forall x, x = 0 \vee \exists y, (x = S(y))$ en utilisant le schéma de récurrence.

Ex 5. L'addition est «définie» par récurrence sur l'argument de droite. Pour démontrer qu'elle satisfait les mêmes propriétés à gauche, il faut travailler. Ça mène à une preuve de commutativité. Démontrer :

- $\forall x, 0 + x = x$;
- $\forall x, y, S(x) + y = S(x + y)$.

En déduire $\forall x, y, x + y = y + x$.