Catégories 8: logique

Largement basé sur Jacobs, 1999 et Pitts, 2000.

Sémantiques de la logique propositionnelle

Différencier (terminologie non standard, pas mieux)

- Logique extensionnelle
- Logique intentionnelle
- Théorie de la démonstration.

Sémantiques de la logique propositionnelle

Logique extensionnelle	Ordre partiel
Logique intentionnelle	Préordre
Théorie de la démonstration	Catégorie

- Extensionnelle : équivalence logique $\Rightarrow$ égalité.
- Intentionnelle : implication logique = relation $\leq$.
- Théorie de la démontsration : Implication logique = existence d'un morphisme.

Connecteurs logiques extensionnels

Définition

Un treillis complet est un ordre partiel $(L, \leq)$ tel que tout sous-ensemble $A \subseteq L$ admet un plus petit majorant $\bigvee A$ et un plus grand minorant $\bigwedge A$.

- Conséquence : le treillis est borné par

$$\perp = \bigvee \emptyset \qquad\qquad \top = \bigwedge \emptyset.$$

- Le faux implique tout le monde, tout le monde implique le vrai.

Connecteurs logiques extensionnels

Une algèbre de Heyting complète est un treillis complet $(L, \leq)$ tel que :

Définition

pour tous $a, b \in L$, il y a un plus grand x tel que

$$a \wedge x \leq b,$$

noté b^a ou $a \Rightarrow b$.

ou, de façon équivalente, tel que :

Définition

pour tous $b \in L$ et $A \subseteq L$,

$$b \wedge \bigvee A = \bigvee \{b \wedge a \mid a \in A\}.$$

Connecteurs logiques extensionnels

En langage catégorique, ça se dit :

Définition

Une algèbre de Heyting complète est un ordre partiel qui a les limites, les colimites et les exponentielles.

Pour comprendre :

- Un ordre partiel est une catégorie avec au plus une flèche entre deux objets, telle que la relation binaire ainsi définie soit symétrique, réflexive et transitive.
- Du coup, une telle catégorie a forcément les égaliseurs.
- Avoir les limites se réduit à avoir les produits arbitraires (pas forcément finis).
- De même pour les colimites.

Connecteurs logiques extensionnels

Cette formulation mène à une définition par adjonction des connecteurs logiques :

$$\frac{a \leq b \quad a \leq c}{\overline{a \leq (b \wedge c)}} \qquad \frac{b \leq a \quad c \leq a}{\overline{(b \vee c) \leq a}} \qquad \frac{(c \wedge a) \leq b}{\overline{c \leq b^a}}$$

$$\frac{}{\overline{\perp \leq a}} \qquad \frac{}{\overline{a \leq \top}} \; .$$

Vision catégorique de la déduction, où la coupure est centrale, puisque c'est la composition catégorique. $\neq$ élimination des coupures habituelle.

Après la logique propositionnelle ?

Comment passer à une logique du premier ordre ?

Hyperdoctrines et prop-catégories

- Hyperdoctrines inventées par Lawvere pour traiter toute la logique.
- On va se restreindre à une variante introduite par Pitts, les prop-catégories.

On note **PoSet** la catégorie des ordres partiels et des fonctions monotones.

Définition

Une prop-catégorie est une catégorie $\mathcal{C}$ avec produits finis, équipée d'un foncteur Prop : $\mathcal{C}^{op} \to$ ***PoSet****.*

Vas-y on s'en fout avec mes potes.

Hyperdoctrines et prop-catégories

Plus explicitement,

Interlude

- C'est super idiomatique de faire une première définition imbitable qu'on explicite ensuite.
- C'est pas si mal, parce que ça permet, quand on retombe dessus, de s'en souvenir très rapidement.
- Par exemple : qu'est-ce qu'une CCC ? Merdre, c'est quand-même plus clair que les axiomes logiques.
- Bref.

Hyperdoctrines et prop-catégories

Plus explicitement,

Définition

Une prop-catégorie $\mathcal{C}$ est une catégorie avec produits finis et

- *pour chaque objet X, un ordre partiel $(Prop(X), \leq)$ de propriétés de X*
- *et pour chaque $f : Y \to X$ une fonction $f^* : Prop(X) \to Prop(Y)$ de pullback selon f*
  - *monotone : si $A \leq A'$, alors $f^*(A) \leq f^*(A')$*
  - *et fonctorielle : $id^* = id$ et $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.*

f^* c'est la substitution, cf catégorie classifiante $\mathrm{Cl}(\Lambda_{\mathrm{ST}})$.

Exemple

- Pour C, n'importe quelle catégorie de termes, genre $\mathrm{Cl}(\Lambda_{\mathrm{ST}})$.
- Pour chaque contexte (vu comme une liste de types) Γ, l'ensemble des formules à variables libres dans Γ, à partir des connecteurs logiques qui vous plaisent.
- Comme ordre partiel l'implication logique.
- Bon, ça fait pas un ordre partiel mais un préordre (cf. la discussion du début).
- Donc l'égalité dans $\mathit{Prop}(\Gamma)$, c'est l'équivalence logique.
- Le pullback selon γ c'est vraiment γ^*.
- La fonctorialité c'est (comme d'hab) le lemme de substitution.

Langages internes

Dans la suite, on s'intéresse aux prop-catégories avec conjonctions finies, c'est-à-dire celles où

Conjonctions finies

- pour tout objet X de $\mathcal{C}$, $Prop(X)$ a les produits finis (notés $\wedge$ et $\top$ et appelés ici conjonctions finies, on est dans des ordres partiels) et
- ces produits finis sont préservés par pullback : pour $f : X \to Y$,
  - $f^*(A \wedge_Y B) = f^*(A) \wedge_X f^*(B)$
  - $f^*(\top_Y) = \top_X$.

Langages internes

Dans ce contexte, on parle de langage interne.

- Pour $\mathcal{C}$, on considère un langage typé du genre :
  - les types sont les objets de $\mathcal{C}$
  - les symboles de fonction d'arité $X_1, \ldots, X_n \to Y$ sont les morphismes $X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$.
- Ça donne des termes typés

$$x_1 : X_1, \ldots, x_n : X_n \vdash e : Y$$

comme d'habitude, qui permettent de parler des objets et des morphismes de $\mathcal{C}$ comme d'ensembles et de fonctions.

Langages internes

- Ces termes ont une interprétation évidente dans $\mathcal{C}$:

$$
\begin{array}{rcl}
[\![\epsilon]\!] & = & 1 \\
[\![\Gamma, x : X]\!] & = & [\![\Gamma]\!] \times X \\
[\![x_1 : X_1, \ldots, x_n : X_n \vdash x_i : X_i]\!] & = & \pi_i \\
[\![\Gamma \vdash f(e_1, \ldots, e_n) : Y]\!] & = & f \circ \langle \; [\![\Gamma \vdash e_1 : X_1]\!], \\
 & & \qquad \ldots, \\
 & & \qquad [\![\Gamma \vdash e_n : X_n]\!] \; \rangle
\end{array}
$$

- La substitution c'est la précomposition.

Langages internes

- Pour parler aussi de l'égalité entre morphismes, on introduit un jugement $\Gamma \vdash e = e' : X$, qui s'interprète comme

$$\mathcal{C} \text{ satisfait } \Gamma \vdash e = e' : X$$
$$\text{ssi}$$
$$[\![\Gamma \vdash e : X]\!] = [\![\Gamma \vdash e' : X]\!].$$

- Vision ensembliste :
  - Eléments de Y au stade X : $f : X \to Y$
  - Eléments globaux de Y : $f : 1 \to Y$ ($\approx$ termes clos).

$\Rightarrow$ catégorie des éléments globaux de $\mathcal{C}$.
C'est l'image de $y1$ dans **Set**.

Langages internes

Truc faux : prendre trop au sérieux la vision ensembliste et croire que

$$X \vdash f = g : Y \text{ ssi pour tout élément global } x : 1 \to X \\ 1 \vdash f(x) = g(x) : Y.$$

Par exemple, X pourrait ne pas avoir d'élément global (cf. $X = \perp$).
C'est bien normal, sinon on regarderait pas Yoneda, mais seulement $y1$.

Langages internes

Bilan : langages internes équationnels

- Morphismes vus comme fonctions entre ensembles.
- Morphismes vus comme symboles de fonction.
- Jugement d'égalité, remarque : réflexif, symétrique, transitif.

On va étendre cette notion de langage interne au cas des prop-catégories.

Langages internes

Dans une prop-catégorie avec conjonctions finies, on construit une notion de langage interne comme suit.

- Les termes $\Gamma \vdash e : X$ sont ceux de $\mathcal{C}$.
- Les formules $\Gamma \vdash \phi$: Prop sont les propriétés de $[\![\Gamma]\!]$.
- Les jugements prennent la forme $\Gamma \mid \Phi \vdash \phi$: Prop, où Φ est une liste de formules.
- Interprétation :

$$\mathcal{C} \text{ satisfait } \Gamma \mid \phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \phi : \text{Prop ssi}$$
$$[\![\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n]\!] \leq_{[\![\Gamma]\!]} [\![\phi]\!].$$

(Dans la suite on omet le Prop qui sert à rien.)

Connecteurs logiques dans une prop-catégorie

On va maintenant définir les connecteurs logiques standards dans les prop-catégories. Pour commencer :

- Une prop-catégorie a les disjonctions finies ssi
  - pour tout X, $Prop(X)$ a les coproduits finis et
  - ces coproduits finis sont préservés par pullback.
- Une prop-catégorie a les implications (de Heyting) ssi elle a les conjonctions finies et
  - pour tout X, $Prop(X)$ a les exponentielles et
  - ces exponentielles sont préservées par pullback.

Correction

Théorème

Dans une prop-catégorie avec conjonctions finies, disjonctions finies et implications, le langage interne est clos par les règles habituelles de déduction naturelle.

Ex (on omet la partie constante du contexte) :

$$\frac{\Phi \vdash \phi \wedge \phi'}{\Phi \vdash \phi}\,.$$

Formulation par adjonction

Ensemble de règles « doubles », logiquement équivalentes à la déduction naturelle, mais basées sur la définition par adjonction des connecteurs :

$$\frac{\Phi \vdash \phi \qquad \Phi \vdash \phi'}{\Phi \vdash \phi \wedge \phi'} \qquad \frac{\Phi, \phi \vdash \psi \qquad \Phi, \phi' \vdash \psi}{\Phi, \phi \vee \phi' \vdash \psi}$$

$$\frac{\Phi, \phi \vdash \psi}{\Phi \vdash \phi \Rightarrow \psi} \qquad \frac{}{\bot \vdash \phi} \qquad \frac{}{\phi \vdash \top}$$

Quantificateurs

De la même façon,

- formulation par adjonction des règles sur les quantificateurs,
- définition catégorique par adjonction.

Les quantificateurs par adjonction

$$\frac{\Gamma, x : X \mid \Phi \vdash \phi(x)}{\Gamma \mid \Phi \vdash \forall x.\phi(x)} \qquad \frac{\Gamma, x : X \mid \Phi, \phi(x) \vdash \psi}{\Gamma \mid \Phi, \exists x.\phi(x) \vdash \psi}.$$

Pour $\forall$:

- le séquent du haut se passe dans $\mathit{Prop}(\Gamma \times X)$,
- celui du bas se passe dans $\mathit{Prop}(\Gamma)$.
- Comme Φ n'utilise pas x, il vit plutôt dans $\mathit{Prop}(\Gamma)$.
- Donc la bonne vision, c'est que le Φ du haut est en fait $\pi^*(\Phi)$, pour $\pi : \Gamma \times X \to \Gamma$.
- Du coup, on peut réécrire la règle en

$$\frac{\Gamma, x : X \mid \pi^*(\Phi) \vdash \phi(x)}{\Gamma \mid \Phi \vdash \forall x.\phi(x)} \quad \text{i.e.,} \quad \frac{\pi^*(A) \leq_{Y \times X} B}{A \leq_Y \forall_{Y,X} B}.$$

Détails techniques

- Le $\forall$ est donc un adjoint à droite de π^*.
- En fait, pour valider la règle de substitution :

$$\frac{\Gamma \vdash e = e' : X \qquad \Gamma, x : X \mid \Phi(x) \vdash \phi(x)}{\Gamma \mid \Phi(e) \vdash \phi(e')}$$

  il faut en plus demander que l'adjoint soit naturel en Y, i.e., pour $f : Y' \to Y$,

$$f^*(\forall_{Y,X} A) = \forall_{Y',X}((f \times id_X)^* A).$$

- Ça s'appelle une condition de Beck-Chevalley et ça décrit le comportement du truc par rapport à la substitution.

Détails techniques

- Pour le $\exists$, c'est la même chose, sauf que la règle se fait en contexte, i.e., on veut $\exists_{Y,X}$ tel que

$$\frac{A \wedge \exists_{Y,X} B \leq C}{\overline{\pi^*(A) \wedge B \leq \pi^*(C)}}\,.$$

- La manière standard est de demander une adjonction

$$\frac{\exists_{Y,X} B \leq C}{\overline{B \leq \pi^*(C)}}$$

naturelle en Y et la propriété de Frobenius

$$\exists_{Y,X}(\pi^*(A) \wedge B) = A \wedge \exists_{Y,X} B.$$

- C'est la tautologie standard

$$\exists x.(A \wedge B) \Leftrightarrow A \wedge \exists x.B$$

si x n'est pas libre dans A.

Détails techniques

La propriété de Frobenius

$$\exists_{Y,X}(\pi^*(A) \wedge B) = A \wedge \exists_{Y,X} B$$

permet de retrouver la correspondance

$$\cfrac{\cfrac{A \wedge \exists_{Y,X} B \leq C}{\exists_{Y,X}(\pi^*(A) \wedge B) \leq C}}{\pi^*(A) \wedge B \leq \pi^*(C).}$$

Détails techniques

Remarque : en présence d'implications, Frobenius vient toute seule :

$$
\begin{array}{c}
A \wedge \exists_{Y,X} B \leq C \\
\hline\hline
(\exists_{Y,X} B) \wedge A \leq C \\
\hline\hline
\exists_{Y,X} B \leq (A \Rightarrow C) \\
\hline\hline
B \leq \pi^*(A \Rightarrow C) \\
\hline\hline
B \leq (\pi^* A) \Rightarrow (\pi^* C) \\
\hline\hline
B \wedge \pi^*(A) \leq \pi^*(C) \\
\hline\hline
\pi^*(A) \wedge B \leq \pi^*(C).
\end{array}
$$

Les quantificateurs par adjonction

Définition

- *Une prop-catégorie avec conjonctions finies a la quantification universelle ssi pour tous X, Y, le pullback π^* a un adjoint à droite vérifiant Beck-Chevalley.*
- *Une prop-catégorie avec conjonctions finies a la quantification existentielle ssi pour tous X, Y, le pullback π^* a un adjoint à gauche vérifiant Beck-Chevalley.*

Egalité

- On a déjà vu le jugement d'égalité $\Gamma \vdash e = e' : X$, qui désigne l'égalité dans $\mathcal{C}$, dite égalité externe.
- La prop-catégorie peut avoir sa propre notion d'égalité, dite égalité interne et notée $e =_X e'$.
- La première est un jugement logique, la seconde est une formule atomique.
- L'interne est en général plus faible que l'externe, dans le sens où on peut dériver

$$\frac{\Gamma \vdash e = e' : X}{\Gamma \mid \ \vdash e =_X e' : \mathrm{Prop}}\ .$$

- Quand les deux coïncident, on dit que la prop-catégorie a une très forte égalité interne (rigolez pas, ça existe juste forte).

Egalité

- Règle par adjonction :

$$\frac{\Gamma, x : X \mid \Phi \vdash \phi(x, x)}{\Gamma, x : X, x' : X \mid \Phi, x =_X x' \vdash \phi(x, x')}$$

- On a, pour $\delta = \langle id, id \rangle : X \to X \times X$,

$$\phi(x, x) = [x \mapsto x, x' \mapsto x](\phi(x, x')) = \delta^*(\phi(x, x')).$$

- La règle ci-dessus devient dans une prop-cat :

$$\frac{A \leq_{Y \times X} \delta^*(B)}{Eq(A) \leq_{Y \times X \times X} B}$$

- Dans l'idée $Eq(\psi) = \psi \wedge (x =_X x')$.

Egalité

Définition (Egalité interne)

Une égalité interne est un adjoint à gauche de la contraction δ^*, préservé par pullback.

On définit pour $f, g : Y \to X$

$$[\![Y \vdash f =_X g : \mathrm{Prop}]\!] = \langle f, g \rangle^* (Eq(\top_{1 \times X \times X})).$$

Quantification généralisée

- Les quantificateurs comme adjoints de π^*.
- Pourquoi seulement π ?
- Pas de bonne raison :

Définition

- *Une prop-catégorie avec conjonctions finies a la quantification généralisée ssi pour tout $f : X \to Y$, le pullback f^* a un adjoint à droite, noté $\forall_f$, vérifiant Beck-Chevalley.*
- *Une prop-catégorie avec conjonctions finies a la quantification généralisée ssi pour tout $f : X \to Y$, le pullback f^* a un adjoint à gauche, noté $\exists_f$, vérifiant Beck-Chevalley.*

Quantification généralisée

- Si la prop-catégorie est assez riche, on peut les définir :

$$\begin{aligned} \forall_f(A) &= [\![\forall x : X.(f(x) =_Y y \Rightarrow A(x))]\!] \\ \exists_f(A) &= [\![\exists x : X.(f(x) =_Y y \wedge A(x))]\!] \end{aligned}$$

- Règles par adjonction :

$$\frac{y : Y \mid \exists_x : X.(f(x) =_Y y \wedge A(x)) \vdash B(y)}{x : X \mid A(x) \vdash B(f(x))}$$

$$\frac{y : Y \mid B(y) \vdash \forall_x : X.(f(x) =_Y y \Rightarrow A(x))}{x : X \mid B(f(x)) \vdash A(x)}$$

- Exo : que devient Beck-Chevalley ?

Beck-Chevalley pour la quantification généralisée

Définition

La quantification universelle généralisée d'une prop-catégorie vérifie Beck-Chevalley ssi pour tout

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & W \arrow[d, "k"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

pullback on a

$$g^*\exists_k = \exists_f h^* \qquad \textit{et} \qquad g^*\forall_k = \forall_f h^*.$$

Les $\forall_f$ et $\exists_f$ définis à partir de $\forall$, $\exists$, $\wedge$ et $\Rightarrow$ vérifient la condition seulement pour certains pullbacks a priori.

Hyperdoctrines

Les hyperdoctrines généralisent les prop-catégories

- en allant vers **Cat** au lieu de **PoSet**
- et en étant pseudofonctorielles au lieu de fonctorielles.

Définition

*Une hyperdoctrine est une catégorie $\mathcal{C}$ avec produits finis équipée d'un pseudofoncteur Prop : $\mathcal{C}^{op} \to$ **Cat**.*

Pseudofoncteurs

Définition

Un pseudofoncteur F, c'est comme un foncteur vers une 2-catégorie, sauf que ses propriétés sont vérifiées seulement modulo iso :

$$F(id) \cong id \qquad\qquad F(f \circ g) \cong F(f) \circ F(g).$$

Attention : les $\cong$ sont des 2-cellules inversibles.

Hyperdoctrines

Du coup :

Définition

Une hyperdoctrine est une catégorie $\mathcal{C}$ avec,

- *pour chaque objet X, une catégorie $Prop(X)$ de propriétés de X*
- *et pour chaque $f : Y \to X$ un pseudofoncteur $f^* : Prop(X) \to Prop(Y)$ de pullback selon f :*

$$id^* \cong id \qquad\qquad (g \circ f)^* \cong f^* \circ g^*.$$

- Ici, les $\cong$ sont des transformations naturelles.
- L'implication logique, c'est l'existence d'un morphisme (mono ?) entre deux objets dans un $Prop(X)$.
- Par pseudofonctorialité, c'est préservé par substitution.

Hyperdoctrines

Définition

Une hyperdoctrine est une catégorie $\mathcal{C}$ avec produits finis équipée d'un pseudofoncteur Prop : $\mathcal{C}^{op} \to$ ***Cat***.

- Si l'image de *Prop* est dans la sous catégorie des ordres partiels : logique extensionnelle (cf. prop-catégories).
- Si l'image de *Prop* est dans la sous catégorie des préordres : logique intentionnelle.
- Sinon : théorie de la démonstration.

Hyperdoctrine des slices (tranches ?)

Pour $\mathcal{C}$ avec pullbacks, on définit l'hyperdoctrine $\mathcal{C}/\cdot$ par

- $\mathcal{C}/X$ a pour objets les morphismes $f : Y \to X$,
- $\mathcal{C}/X$ a pour morphismes $f \to g$ les h tels que

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd}$$ commute,

- l'identité est l'identité dans $\mathcal{C}$,
- la composition est la composition dans $\mathcal{C}$,

Hyperdoctrine des slices (tranches ?)

- pour $k : X \to X'$, C/f est défini par pullback :

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, dotted, "k^*(h')"] \arrow[drr, dashed] \arrow[dd, dashed, "k^*(f')"'] & Z \arrow[drr, dashed] \arrow[ddl, dashed, "k^*(g')"] & & \\
& & Y' \arrow[r, "h'"] \arrow[dd, "f'"'] & Z' \arrow[ddl, "g'"] \\
X \arrow[drr, "k"] & & & \\
& & X' &
\end{tikzcd}
$$

Hyperdoctrine des sous-objets intentionnelle

- Intuition : un objet $f : Y \to X$ de $\mathcal{C}/X$ représente, par son image, un sous-objet de X.
- Trop dépendant du morphisme considéré. On considère en général juste les monomorphismes.

Définition

Un morphisme $f : Y \to X$ est un mono ssi pour tous $g, h : Z \to Y$ tels que $fg = fh$, $g = h$.

- Intuition : f est injective.
- Intuition (bis) : f est totale et ne confond rien, donc on peut l'effacer à gauche.
- Notés $m : Y \rightarrowtail X$.

Hyperdoctrine des sous-objets intentionnelle

- En restreignant C/X aux monomorphismes, on obtient une hyperdoctrine préordre notée **Mono**(C).
- On note $f \leq g$ ssi il existe un mono m tel que $f = gm$.
- Pas une prop-catégorie en général (pas un ordre partiel).
- Il peut y avoir plusieurs monos isomorphes :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, tail, bend left, "m"] \arrow[dr, tail, "f"'] & & Z \arrow[ll, tail, bend left, "m'"] \arrow[dl, tail, "g"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Prop-catégorie de sous-objets

- Pour obtenir une prop-catégorie, on quotiente **Mono**$(\mathcal{C})$ par la relation d'équivalence engendrée par $\leq$.
- Le résultat s'appelle **Sub**$(\mathcal{C})$, la prop-catégorie des sous-objets de $\mathcal{C}$.
- On va maintenant montrer que les prop-catégories de sous-objets sont très extensionnelles.

Types sous-ensembles

Par exemple, une propriété pas du tout donnée est d'avoir les types sous-ensembles.

Définition

Une prop-catégorie a les types sous-ensembles (en gros) ssi pour toute propriété $A \in Prop(X)$, il y a un objet $\{A\}$ de $\mathcal{C}$ correspondant exactement à A ($\approx \{x \in X \mid A\}$).

Par ex, pour $f : Y \to X$, on veut $\dfrac{\top_Y \leq f^*(A)}{Y \to \{A\}}$, i.e., si pour tout $y : Y$ on a $A(f(y))$, alors f se factorise à travers $\{A\}$, i.e., il y a un $\{f\} : Y \to \{A\}$, tel que ...

Choix unique

Une autre propriété pas donnée dans les prop-catégorie est le choix unique.

- Une relation est une propriété sur un produit, $R \in Prop(X \times Y)$.
- Une relation est single-valued ssi elle satisfait (au sens du langage interne) :

$$x : X, y : Y, y' : Y \mid R(x, y) \wedge R(x, y') \vdash y =_Y y'.$$

- Une prop-catégorie $(\mathcal{C}, Prop)$ avec égalité interne et types sous-ensembles a les choix uniques ssi toute relation fonctionnelle correspond exactement à un morphisme dans $\mathcal{C}$.
- Ça implique en gros d'avoir un opérateur dans les termes style choix ϵ de Hilbert mais pour le choix unique.

Premières propriétés

Théorème

Une prop-catégorie de sous-objets :

- *a une très forte égalité interne,*
- *a les types sous-ensembles,*
- *a le choix unique.*

En plus la réciproque est vraie : si une prop-catégorie a ces trois propriétés, alors elle est équivalente à sa prop-catégorie de sous-objets.

Vers les topos

- Les prop-catégories de sous-objets commencent à ressembler aux ensembles :
  - les prédicats sont identifiés avec des sous-ensembles,
  - les relations fonctionnelles sont des fonctions,
  - l'égalité interne est l'égalité des fonctions.
- Pour résumer :

La catégorie de base voit (presque) toute la logique.

Vers les topos

- Quand la catégorie de base voit-elle toute la logique ? Quand peut-on raisonner dans une prop-catégorie de sous-objets comme dans les ensembles ?
- On va étendre la liste des trois propriétés (très forte égalité interne, types sous-ensembles, choix unique) jusqu'à obtenir une définition logique de topos.
- Le miracle c'est que cette définition logique peut se reformuler avec quelques axiomes tout simples sur la catégorie de base.

Ordre supérieur

Définition

Une prop-catégorie $(\mathcal{C}, Prop)$ *a les* ***fonctions caractéristiques*** *ssi il y a un objet* Ω *de* $\mathcal{C}$ *tel que*

$$\mathcal{C}(X, \Omega) \cong Obj(Prop(X)),$$

naturellement en X.

En gros, Ω est un type `Prop` comme en Coq, ou plutôt *o* en logique d'ordre supérieur, avec l'existence de fonctions caractéristiques.

Ordre supérieur

Définition

Une prop-catégorie d'ordre supérieur est une prop-catégorie avec fonctions caractéristiques, dont la catégorie de base est cartésienne fermée.

- Les prop-catégories d'ordre supérieur caractérisent les modèles (extensionnels) de la logique d'ordre supérieur.
- Pour des modèles moins extensionnels, passer aux hyperdoctrines.

Définition logique d'un topos

Définition

Un topos est une catégorie dont la prop-catégorie de sous-objets est d'ordre supérieur.

Rq : ça implique que les topos ont les limites finies (pour pouvoir prendre la prop-catégorie de sous-objets).

Définition logique d'un topos

Définition

Un topos est une catégorie dont la prop-catégorie de sous-objets est d'ordre supérieur.

Attention, la catégorie de base d'une hyperdoctrine d'ordre supérieur n'est pas forcément un topos :

Théorème

La prop-catégorie de sous-objets d'un topos est un modèle de la logique d'ordre supérieur extensionnelle, i.e., tel que l'équivalence logique implique l'égalité.

Or, la logique d'ordre supérieur a des modèles non extensionnels.

Définition élémentaire d'un topos

Définition

Une catégorie $\mathcal{C}$ *avec limites a les* ***fonctions caractéristiques*** *ssi elle a un objet* Ω *et un morphisme true* : $1 \to \Omega$ *tel que pour tout mono* $m : A \rightarrowtail X$*, il existe un unique* $\chi_m : X \to \Omega$ *faisant du carré suivant un pullback :*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "m"] \arrow[d, "!"'] & X \arrow[d, "\chi_m"] \\ 1 \arrow[r, "true"] & \Omega \end{tikzcd}$$

Définition

Un topos est une CCC avec fonctions caractéristiques.

Définition élémentaire d’un topos

Définition

Un topos est une CCC avec fonctions caractéristiques.

Un prédicat a trois descriptions canoniques dans un topos :

$$m : A \rightarrowtail X \qquad \chi_m : X \to \Omega \qquad \lambda(\chi_m) : 1 \to \mathcal{P}(\Omega),$$

où $\mathcal{P}(\Omega) = \Omega^X$.

Extensions

- La logique dans les prop-catégories sous-objets de topos est intuitionniste a priori.
- Elle est encore un peu faiblarde par rapport à la théorie des ensembles (par ex. pas de schéma de remplacement je crois).
- Néanmoins, Lawvere et Tierney y ont reproduit la preuve de Cohen de l'indépendance de l'hypothèse du continu et la construction du modèle la contredisant se fait par composition de trois constructions catégoriques standard.

Exemples de topos

$\mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$:

- préfaisceaux d'ensembles sur un espace topologique,
- sites de Grothendieck,
- ensembles évoluant dans le temps (modèles de Kripke).

Quelques propriétés

Théorème

Un topos a les colimites finies.

Théorème

Un topos a les images : tout morphisme $f : X \to Y$ admet une factorisation initiale*, i.e., une plus petite décomposition de f finissant par un mono :*

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[dr] & Im(f) \arrow[r, tail] \arrow[d, dashed, "!"] & Y \\
& Z \arrow[ur, tail] &
\end{tikzcd}
$$

Conclusion

- La logique catégorique est considérée par certains philosophes comme une approche des fondements des mathématiques.
- Si je comprends bien, il ne s'agit pas exactement de fondements au sens d'une construction partant de rien, mais plutôt comme de fondements au sens de la description de l'activité mathématique dans son ensemble.