

Rappels sur le
 λ -calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique
iso commutant près
Bilan

Exponentielles

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

Catégories 2

Le λ -calcul simplement typé comme une catégorie

Rappels sur le
 λ -calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique
iso commutant près
Bilan

Exponentielles

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

$$e ::= x \mid e e' \mid \lambda x. e$$

$$\tau ::= \alpha \mid \tau^{\tau'}$$

$$\Gamma ::= \epsilon \mid \Gamma, x : \tau$$

Le strip-tease le plus éculé du monde

Rappels sur le
λ-calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
Application au λ-calcul
Unicité (générale) à unique
iso commutant près
Bilan

Exponentielles

Définition catégorique
Application au λ-calcul
Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

$$\frac{}{\Gamma, \tau, \Gamma' \vdash \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau^{\tau'} \quad \Gamma \vdash \tau'}{\Gamma \vdash \tau}$$

$$\frac{\Gamma, \tau' \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau^{\tau'}}$$

- Sous le tapis : $\vdash \Gamma$, α -équivalence, ...
- Notations
 - On note $\tau^{\tau'}$ ou $\tau' \rightarrow \tau$, alternativement.
 - On note $\Gamma \vdash \tau$ l'ensemble des $\Gamma \vdash e : \tau$.
- Détail technique :
 - morphismes = $\Gamma \vdash \gamma : \Delta$ *prouvables*
 - = substitutions valides avec leur domaine et leur codomaine.

Le strip-tease le plus éculé du monde

Rappels sur le
λ-calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
Application au λ-calcul
Unicité (générale) à unique
iso commutant près
Bilan

Exponentielles

Définition catégorique
Application au λ-calcul
Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

$$\frac{\vdash \Gamma, x : \tau, \Gamma'}{\Gamma, x : \tau, \Gamma' \vdash x : \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash e : \tau' \quad \Gamma \vdash e' : \tau'}{\Gamma \vdash e e' : \tau}$$

$$\frac{\Gamma, x : \tau' \vdash e : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x. e : \tau^{\tau'}}$$

- Sous le tapis : $\vdash \Gamma$, α -équivalence, ...
- Notations
 - On note $\tau^{\tau'}$ ou $\tau' \rightarrow \tau$, alternativement.
 - On note $\Gamma \vdash \tau$ l'ensemble des $\Gamma \vdash e : \tau$.
- Détail technique :
 - morphismes = $\Gamma \vdash \gamma : \Delta$ *prouvables*
 - = substitutions valides avec leur domaine et leur codomaine.

Règle admissible

Rappels sur le
 λ -calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique
iso commutant près
Bilan

Exponentielles

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

$$\frac{\Gamma \vdash e' : \tau' \quad \Gamma, x : \tau', \Gamma' \vdash e : \tau}{\Gamma, \Gamma' \vdash [x \mapsto e'](e) : \tau}$$

Egalité (Relation d'équivalence)

Rappels sur le
 λ -calcul
 simplement typé

Catégorie des
 substitutions

Catégorie syntaxique
 Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
 Application au λ -calcul
 Unicité (générale) à unique
 iso commutant près

Bilan

Exponentielles

Définition catégorique
 Application au λ -calcul
 Unicité (générale) à unique
 iso commutant près

Bilan

$$\begin{array}{c} \text{REFL} \\ \Gamma \vdash e : \tau \\ \hline \Gamma \vdash e = e : \tau \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{SYM} \\ \Gamma \vdash e = e' : \tau \\ \hline \Gamma \vdash e' = e : \tau \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{TRANS} \\ \Gamma \vdash e = e' : \tau \quad \Gamma \vdash e' = e'' : \tau \\ \hline \Gamma \vdash e = e'' : \tau \end{array}$$

Egalité (Congruence)

Rappels sur le
 λ -calcul
 simplement typé

Catégorie des
 substitutions

Catégorie syntaxique
 Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
 Application au λ -calcul
 Unicité (générale) à unique
 iso commutant près
 Bilan

Exponentielles

Définition catégorique
 Application au λ -calcul
 Unicité (générale) à unique
 iso commutant près

Bilan

$$\text{APP} \quad \frac{\Gamma \vdash e_1 = e_2 : \tau' \quad \Gamma \vdash e'_1 = e'_2 : \tau'}{\Gamma \vdash e_1 e'_1 = e_2 e'_2 : \tau}$$

$$\text{FUN} \quad \frac{\Gamma, x : \tau' \vdash e = e' : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x. e = \lambda x. e' : \tau'}$$

Egalité (Suite et fin)

Rappels sur le
λ-calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
Application au λ-calcul
Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

Exponentielles

Définition catégorique
Application au λ-calcul
Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

$$\text{BETA} \frac{\Gamma, x : \tau' \vdash e : \tau \quad \Gamma \vdash e' : \tau'}{\Gamma \vdash (\lambda x. e) e' = [x \mapsto e'](e) : \tau}$$

$$\text{ETA} \frac{\Gamma \vdash e : \tau^{\tau'} \quad x \notin \text{dom}(\Gamma)}{\Gamma \vdash e = \lambda x. (e x) : \tau^{\tau'}}$$

Pas sous le tapis : tout se passe dans un contexte.

Règle admissible

Rappels sur le
 λ -calcul
 simplement typé

Catégorie des
 substitutions

Catégorie syntaxique
 Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
 Application au λ -calcul
 Unicité (générale) à unique
 iso commutant près
 Bilan

Exponentielles

Définition catégorique
 Application au λ -calcul
 Unicité (générale) à unique
 iso commutant près

Bilan

$$\frac{\Gamma \vdash e'_1 = e'_2 : \tau' \quad \Gamma, x : \tau', \Gamma' \vdash e_1 = e_2 : \tau}{\Gamma, \Gamma' \vdash [x \mapsto e'_1](e_1) = [x \mapsto e'_2](e_2) : \tau}$$

Rappels sur le
 λ -calcul
 simplement typé

Catégorie des
 substitutions

Catégorie syntaxique

Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
 iso commutant près

Bilan

Exponentielles

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
 iso commutant près

Bilan

$$e ::= x \mid e e' \mid \lambda x. e$$

$$\tau ::= \alpha \mid \tau^{\tau'}$$

$$\Gamma ::= \epsilon \mid \Gamma, x : \tau$$

$$\gamma ::= \epsilon \mid \gamma, e$$

Rappels sur le
 λ -calcul
 simplement typé

Catégorie des
 substitutions

Catégorie syntaxique

Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
 iso commutant près

Bilan

Exponentielles

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
 iso commutant près

Bilan

$$\frac{}{\Gamma \vdash \epsilon : \epsilon} \quad \frac{\Gamma \vdash \gamma : \Delta \quad \Gamma \vdash e : \tau \quad x \notin \text{dom}(\Delta)}{\Gamma \vdash (\gamma, e) : \Delta, x : \tau}$$

(Formellement,

- contextes = listes de types
- variables libres = indices.

Comme on y voit plus rien, on continue informellement
 comme avant.)

Catégorie syntaxique

Rappels sur le
 λ -calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique
iso commutant près
Bilan

Exponentielles

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

On va définir une catégorie $\text{Cl}_0(\Lambda_{\text{ST}})$ dont :

- les objets sont les contextes de typage Γ et
- les morphismes $\Gamma \rightarrow \Delta$ sont les substitutions

$$\Gamma \vdash \gamma : \Delta.$$

On note aussi $\Gamma \vdash \Delta$ pour l'ensemble des morphismes
 $\Gamma \rightarrow \Delta$.

Pourquoi « substitutions » ?

- Posons $\Gamma = (x_1 : \tau_1, \dots, x_m : \tau_m)$
 $\Delta = (y_1 : \tau'_1, \dots, y_n : \tau'_n)$.
- Voir le tuple

$$\Gamma \vdash (e_1, \dots, e_n) : (y_1 : \tau'_1, \dots, y_n : \tau'_n)$$

comme la substitution

$$\gamma^* = [y_1 \mapsto e_1, \dots, y_n \mapsto e_n].$$

Rappels sur le
 λ -calcul
 simplement typé

Catégorie des
 substitutions

Catégorie syntaxique
 Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
 Application au λ -calcul
 Unicité (générale) à unique
 iso commutant près
 Bilan

Exponentielles

Définition catégorique
 Application au λ -calcul
 Unicité (générale) à unique
 iso commutant près

Bilan

Pourquoi « substitutions » ?

- Posons $\Gamma = (x_1 : \tau_1, \dots, x_m : \tau_m)$
 $\Delta = (y_1 : \tau'_1, \dots, y_n : \tau'_n)$.
- Voir le tuple

$$\Gamma \vdash (e_1, \dots, e_n) : (y_1 : \tau'_1, \dots, y_n : \tau'_n)$$

comme la substitution

$$\gamma^* = [y_1 \mapsto e_1, \dots, y_n \mapsto e_n].$$

- Pour $\Delta \vdash e : \tau$, une version édulcorée du lemme de substitution donne

$$\Gamma \vdash \gamma^*(e) : \tau.$$

- Donc on peut voir γ^* comme une fonction :

$$(\Delta \vdash \tau) \rightarrow \mathbf{Set} (\Gamma \vdash \tau)$$

(pour n'importe quel τ , ou alors indexée par τ).

Rappels sur le
 λ -calcul
 simplement typé

Catégorie des
 substitutions

Catégorie syntaxique
 Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
 Application au λ -calcul
 Unicité (générale) à unique
 iso commutant près
 Bilan

Exponentielles

Définition catégorique
 Application au λ -calcul
 Unicité (générale) à unique
 iso commutant près

Bilan

Pour $\Gamma = (x_1 : \tau_1, \dots, x_m : \tau_m)$,

$$id_{\Gamma} = (x_1, \dots, x_m).$$

La substitution qui va avec est

$$id_{\Gamma} = [x_1 \mapsto x_1, \dots, x_m \mapsto x_m].$$

Composition

- Soient $\Gamma = (x_1 : \tau_1, \dots, x_m : \tau_m)$
 $\Delta = (y_1 : \tau'_1, \dots, y_n : \tau'_n)$
 $\Theta = (z_1 : \tau''_1, \dots, z_p : \tau''_p)$ et

$$\Gamma \xrightarrow{\gamma = (e_1, \dots, e_n)} \Delta \xrightarrow{\gamma' = (e'_1, \dots, e'_p)} \Theta.$$

- Chaque $\Delta \vdash e'_k : \tau''_k$ est envoyé par γ^* sur

$$\Gamma \vdash \gamma^*(e'_k) : \tau''_k.$$

- On définit $\gamma^*(e'_1, \dots, e'_p) = (\gamma^*(e'_1), \dots, \gamma^*(e'_p))$, et on a

$$\begin{aligned} \gamma^* : (\Delta \vdash \Theta) &\rightarrow (\Gamma \vdash \Theta) \\ \gamma' &\mapsto \gamma^*(\gamma') \end{aligned}$$

- On appelle ça la *précomposition* par γ .
- Du coup on définit naturellement la composition par

$$\gamma' \circ \gamma = \gamma^*(\gamma').$$

Associativité

Pour $\Gamma \xrightarrow{\gamma} \Delta \xrightarrow{\gamma'} \Theta \xrightarrow{\gamma''} \xi,$

par définition :

$$\begin{aligned} (\gamma'' \circ \gamma') \circ \gamma &= \gamma^*(\gamma'^*(\gamma'')) \\ \gamma'' \circ (\gamma' \circ \gamma) &= (\gamma^*(\gamma'))^*(\gamma'') \end{aligned}$$

Rappels sur le
 λ -calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique

Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique

iso commutant près

Bilan

Exponentielles

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique

iso commutant près

Bilan

Associativité

Pour $\Gamma \xrightarrow{\gamma} \Delta \xrightarrow{\gamma'} \Theta \xrightarrow{\gamma''} \xi,$

par définition :

$$\begin{aligned} (\gamma'' \circ \gamma') \circ \gamma &= \gamma^* \gamma'^* \gamma'' \\ \gamma'' \circ (\gamma' \circ \gamma) &= (\gamma^* \gamma')^* \gamma'' \end{aligned}$$

en zappant les parenthèses zappables. Il suffit donc de montrer pour tout $\Theta \vdash e'' : \tau''' :$

$$\gamma^* \gamma'^* e'' = (\gamma^* \gamma')^* e'',$$

soit $[y \mapsto e]_j [z \mapsto e']_k (e'') = [z \mapsto [y \mapsto e]_j (e')]_k (e'')$.

- Les variables libres de e'' sont toutes des z_k .
- Résultat classique et facile.

Catégories syntaxique et sémantique

Rappels sur le λ -calcul simplement typé

Catégorie des substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique iso commutant près
Bilan

Exponentielles

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique iso commutant près

Bilan

- Pour l'instant, on a défini $\text{Cl}_0(\Lambda_{\text{ST}})$.
 - Objets : contextes Γ .
 - Morphismes : substitutions $\Gamma \vdash \gamma : \Delta$ *syntaxiques*.
- On définit maintenant $\text{Cl}(\Lambda_{\text{ST}})$ par
 - Objets : contextes Γ .
 - Morphismes $\Gamma \rightarrow \Delta$: substitutions $\Gamma \vdash \gamma : \Delta$ modulo la relation $\Gamma \vdash \gamma = \gamma' : \Delta$ définie par

$$\frac{}{\Gamma \vdash \epsilon = \epsilon : \epsilon} \qquad \frac{\Gamma \vdash \gamma = \gamma' : \Delta \quad \Gamma \vdash e = e' : \tau}{\Gamma \vdash (\gamma, e) = (\gamma', e') : (\Delta, x : \tau)}$$

- En gros on quotiente par BETA , ETA .
- C'est une congruence (ça l'était sur les termes et ça le reste évidemment sur les tuples).

Catégories syntaxique et sémantique (suite)

- La composition et les identités respectent cette équivalence. Dans $\text{Cl}_0(\Lambda_{\text{ST}})$, si on a

$$\begin{array}{ccccc}
 & \gamma^1 = (e_1^1, \dots, e_n^1) & & \gamma^3 = (e_1^3, \dots, e_p^3) & \\
 \Gamma & \xrightarrow{\quad} & \Delta & \xrightarrow{\quad} & \Theta. \\
 & \gamma^2 = (e_1^2, \dots, e_n^2) & & \gamma^4 = (e_1^4, \dots, e_p^4) &
 \end{array}$$

avec $\Gamma \vdash \gamma^1 = \gamma^2 : \Delta$ et $\Delta \vdash \gamma^3 = \gamma^4 : \Theta$, alors $\Gamma \vdash \gamma^3 \circ \gamma^1 = \gamma^4 \circ \gamma^2 : \Theta$.

- Preuve :
$$\begin{aligned}
 \gamma^{1*}(e_k^3) &=_{\Gamma \vdash \tau_k''} (\lambda x_1 \dots \lambda x_n. e_k^3) \gamma^1 \\
 &=_{\Gamma \vdash \tau_k''} (\lambda x_1 \dots \lambda x_n. e_k^4) \gamma^1 \\
 &=_{\Gamma \vdash \tau_k''} (\lambda x_1 \dots \lambda x_n. e_k^4) \gamma^2 \\
 &=_{\Gamma \vdash \tau_k''} \gamma^{2*}(e_k^4).
 \end{aligned}$$

Rappels sur le λ -calcul simplement typé

Catégorie des substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique iso commutant près
Bilan

Exponentielles

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique iso commutant près

Bilan

Intérêt de $CI(\Lambda_{ST})$

Rappels sur le
 λ -calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique
iso commutant près
Bilan

Exponentielles

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

- Bon, ok, ça fait une catégorie. Après ?
- Cette catégorie est en fait la catégorie cartésienne fermée initiale.
- Du coup, en raisonnant dessus, on raisonne en fait sur toutes les catégories cartésiennes fermées (cf. théorie des modèles).
- Ça veut dire quoi « cartésienne fermée » ?

Définition catégorique du produit cartésien

Rappels sur le
 λ -calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

Exponentielles

Définition catégorique

Application au λ -calcul

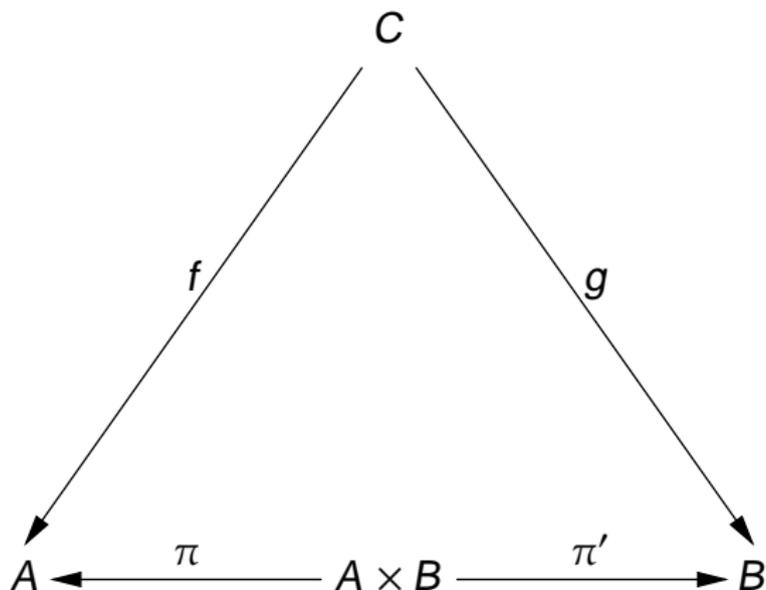
Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

$$A \longleftarrow^{\pi} A \times B \longrightarrow^{\pi'} B$$

$(A \times B, \pi, \pi')$ est un produit cartésien de A et B

Définition catégorique du produit cartésien



$(A \times B, \pi, \pi')$ est un produit cartésien de A et B

Rappels sur le λ -calcul simplement typé

Catégorie des substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique iso commutant près

Bilan

Exponentielles

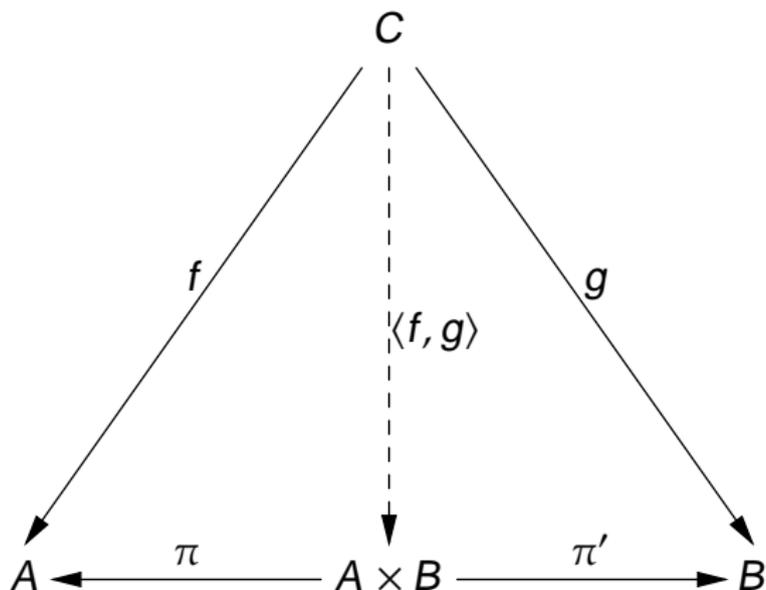
Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique iso commutant près

Bilan

Définition catégorique du produit cartésien



$(A \times B, \pi, \pi')$ est un produit cartésien de A et B

Rappels sur le
 λ -calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

Exponentielles

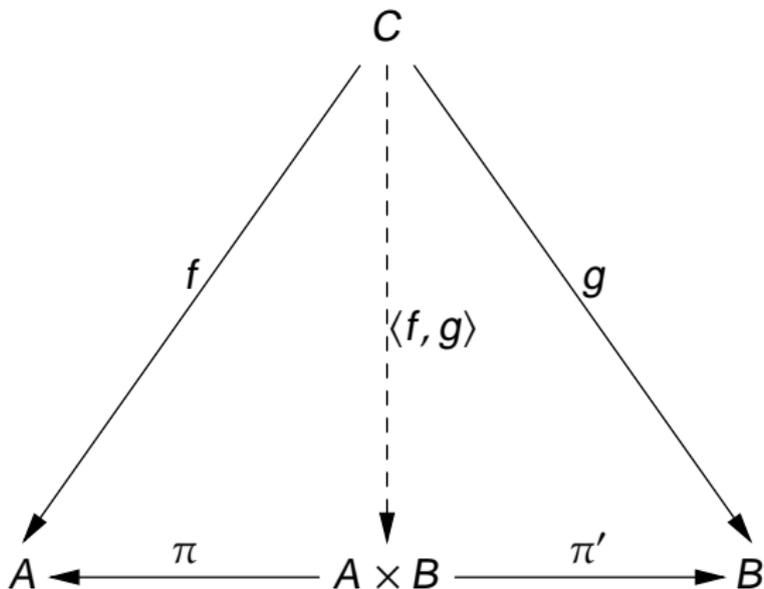
Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

Définition catégorique du produit cartésien



Définition

Une catégorie est cartésienne quand elle a un produit cartésien pour tous objets A et B .

Rappels sur le λ -calcul simplement typé

Catégorie des substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique iso commutant près
Bilan

Exponentielles

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique iso commutant près

Bilan

$\text{Cl}(\Lambda_{\text{ST}})$ est cartésienne

Rappels sur le
 λ -calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

Exponentielles

Définition catégorique

Application au λ -calcul

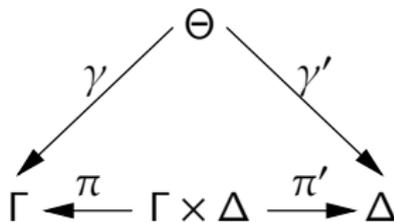
Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

- Soient $\Gamma = (x_1 : \tau_1, \dots, x_m : \tau_m)$ et deux objets
 $\Delta = (y_1 : \tau'_1, \dots, y_n : \tau'_n)$
 de $\text{Cl}(\Lambda_{\text{ST}})$.
- On définit $\Gamma \times \Delta = \Gamma, \Delta$ (leur concaténation).
- Rappel : les noms de variables dans les contextes servent juste à la lisibilité.
- Projections :
 - $\pi = (x_1, \dots, x_m) : \Gamma \times \Delta \rightarrow \Gamma$ et
 - $\pi' = (y_1, \dots, y_n) : \Gamma \times \Delta \rightarrow \Delta$.

CI(Λ_{ST}) est cartésienne (suite)

Pour



Rappels sur le
 λ -calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

Exponentielles

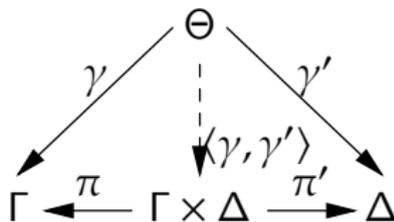
Définition catégorique
Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

CI(Λ_{ST}) est cartésienne (suite)

Pour



- On définit $\langle \gamma, \gamma' \rangle = (\gamma, \gamma')$ (la concaténation).
- On a évidemment $\pi \circ \langle \gamma, \gamma' \rangle = \gamma$ et $\pi' \circ \langle \gamma, \gamma' \rangle = \gamma'$.

Rappels sur le λ -calcul simplement typé

Catégorie des substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique iso commutant près

Bilan

Exponentielles

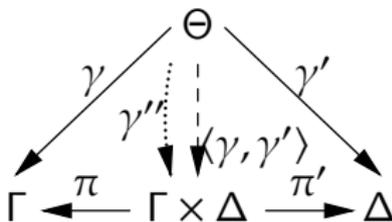
Définition catégorique
Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique iso commutant près

Bilan

CI(Λ_{ST}) est cartésienne (suite)

Pour



- On définit $\langle \gamma, \gamma' \rangle = (\gamma, \gamma')$ (la concaténation).
- On a évidemment $\pi \circ \langle \gamma, \gamma' \rangle = \gamma$ et $\pi' \circ \langle \gamma, \gamma' \rangle = \gamma'$.
- Et pour l'unicité,
 - si γ'' tel que [la même chose],
 - par typage, γ'' est de la forme $(e_1'', \dots, e_m'', e_1''', \dots, e_n''')$,
 - donc $(e_1'', \dots, e_m'') =_{\Theta \vdash \Gamma} \pi \circ \gamma'' =_{\Theta \vdash \Gamma} \gamma$.
 - Symétriquement, $(e_1''', \dots, e_n''') =_{\Theta \vdash \Gamma} \gamma'$.
 - Donc $\gamma'' =_{\Theta \vdash \Gamma} \langle \gamma, \gamma' \rangle$.

Rappels sur le λ -calcul simplement typé

Catégorie des substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique iso commutant près

Bilan

Exponentielles

Définition catégorique
Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique iso commutant près

Bilan

Unicité à iso unique près

Rappels sur le λ -calcul simplement typé

Catégorie des substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique iso commutant près

Bilan

Exponentielles

Définition catégorique
Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique iso commutant près

Bilan

On se place dans une catégorie arbitraire.

Définition

Un isomorphisme est un morphisme $f : A \rightarrow B$ doté d'un inverse $g : B \rightarrow A$ à droite et à gauche :

$$g \circ f = id_A \quad \text{et} \quad f \circ g = id_B.$$

Proposition

Un produit cartésien est unique à unique isomorphisme commutant près.

Bougez pas, je vous explique ce que ça veut dire.

Rappels sur le λ -calcul simplement typé

Catégorie des substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique iso commutant près

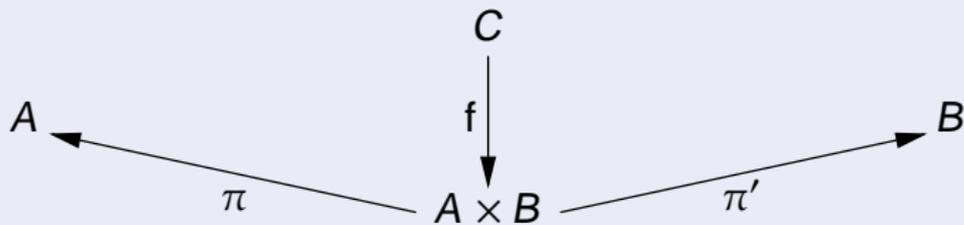
Bilan

Exponentielles

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique iso commutant près

Bilan

Remarque préliminaire



Rappels sur le
 λ -calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

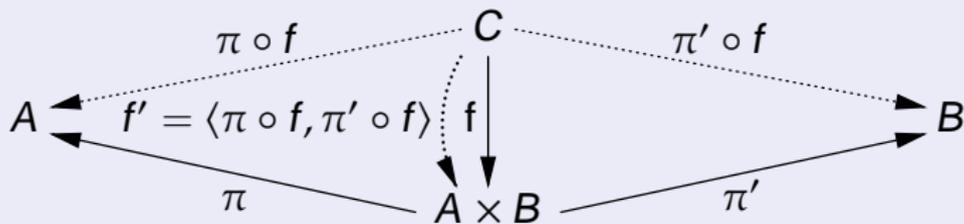
Exponentielles

Définition catégorique
Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

Remarque préliminaire



- $f' = \langle \pi \circ f, \pi' \circ f \rangle$ est l'unique morphisme t.q.

$$\pi \circ f' = \pi \circ f$$

$$\pi' \circ f' = \pi' \circ f.$$
- f convient donc $f' = f$.

Rappels sur le
λ-calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
Application au λ-calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près.

Bilan

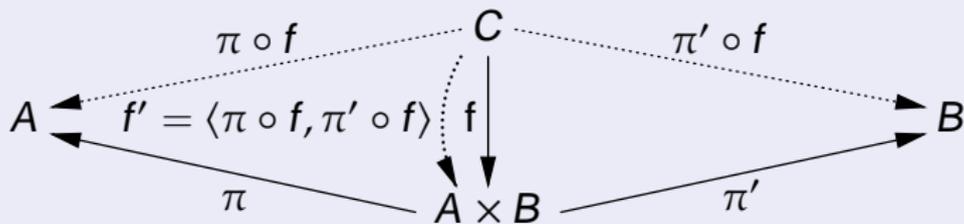
Exponentielles

Définition catégorique
Application au λ-calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

Remarque préliminaire



- $f' = \langle \pi \circ f, \pi' \circ f \rangle$ est l'unique morphisme t.q.

$$\pi \circ f' = \pi \circ f$$

$$\pi' \circ f' = \pi' \circ f.$$

- f convient donc $f' = f$.

- Conclusion :

$$f = \langle \pi \circ f, \pi' \circ f \rangle.$$

Ça s'appelle le *surjective pairing*.

Rappels sur le
 λ -calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

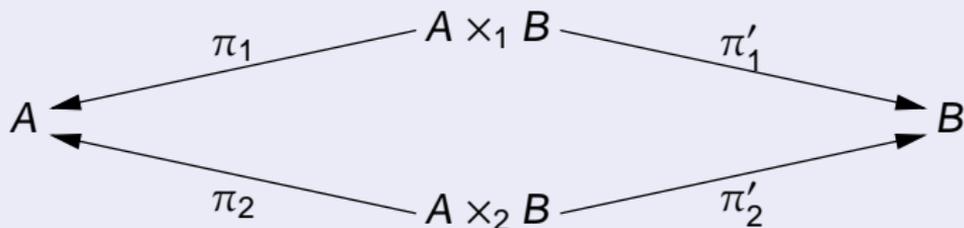
Exponentielles

Définition catégorique
Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

Preuve



Rappels sur le
 λ -calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près.

Bilan

Exponentielles

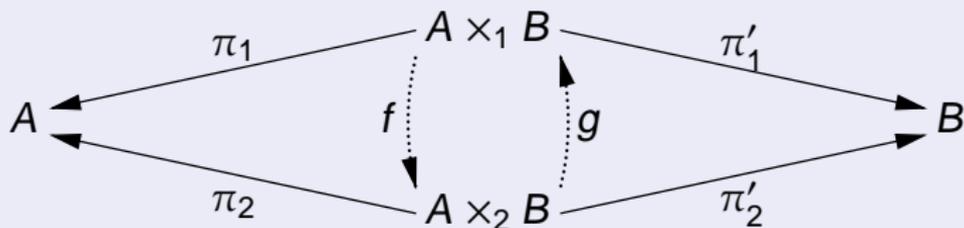
Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

Preuve



- $f = \langle \pi_1, \pi'_1 \rangle_2$ est l'unique morphisme t.q.

$$\pi_2 \circ f = \pi_1$$

$$\pi'_2 \circ f = \pi'_1.$$

- $g = \langle \pi_2, \pi'_2 \rangle_1$ est l'unique morphisme t.q.

$$\pi_1 \circ g = \pi_2$$

$$\pi'_1 \circ g = \pi'_2.$$

C'est un iso

Rappels sur le
 λ -calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

Exponentielles

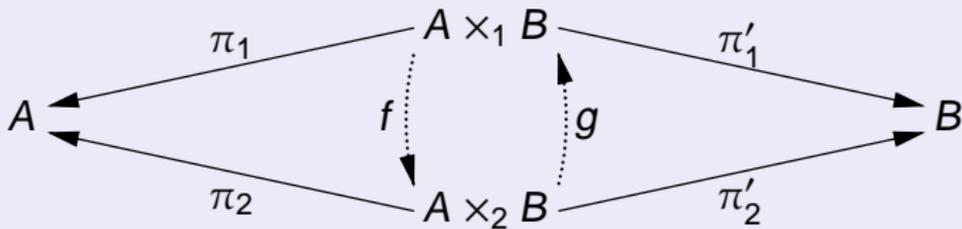
Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

Preuve



- Or $g \circ f = \langle \pi_1 \circ g \circ f, \pi'_1 \circ g \circ f \rangle_1$ par surj. pairing et

C'est un iso

Rappels sur le
 λ -calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

Exponentielles

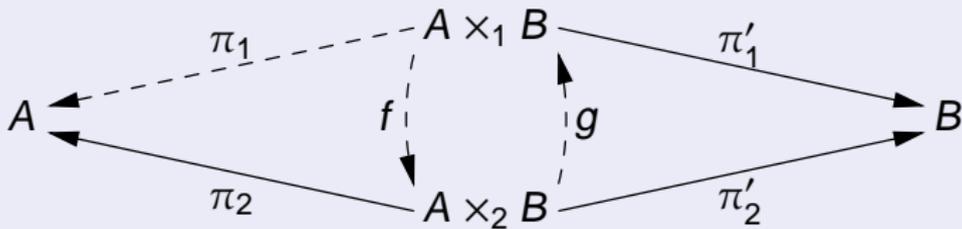
Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

Preuve



- Or $g \circ f = \langle \pi_1 \circ g \circ f, \pi'_1 \circ g \circ f \rangle_1$ par surj. pairing et

$$\pi_1 \circ g \circ f = \pi_1$$

C'est un iso

Rappels sur le
 λ -calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

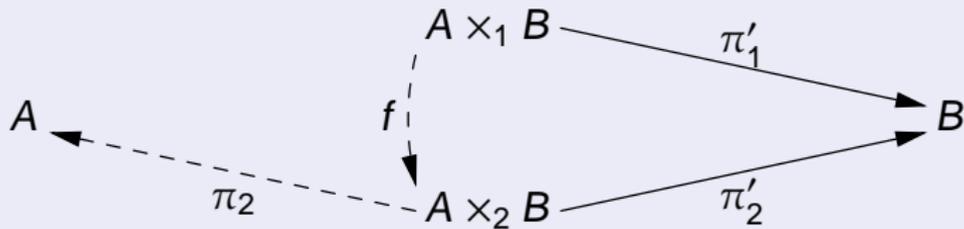
Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique
iso commutant près
Bilan

Exponentielles

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

Preuve



• Or $g \circ f = \langle \pi_1 \circ g \circ f, \pi'_1 \circ g \circ f \rangle_1$ par surj. pairing et

$$\pi_1 \circ g \circ f = \pi_1$$

C'est un iso

Rappels sur le
 λ -calcul
 simplement typé

Catégorie des
 substitutions

Catégorie syntaxique
 Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
 Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
 iso commutant près

Bilan

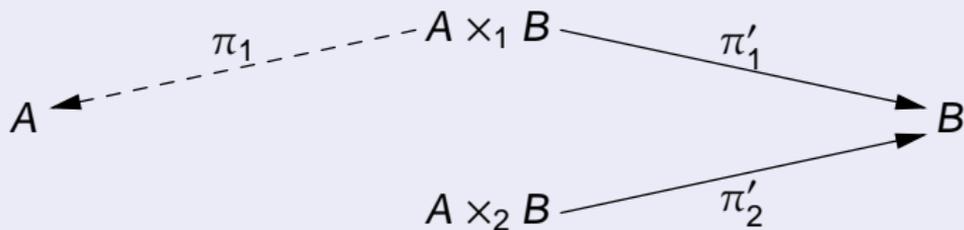
Exponentielles

Définition catégorique
 Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
 iso commutant près

Bilan

Preuve



• Or $g \circ f = \langle \pi_1 \circ g \circ f, \pi'_1 \circ g \circ f \rangle_1$ par surj. pairing et

$$\pi_1 \circ g \circ f = \pi_1$$

C'est un iso

Rappels sur le
 λ -calcul
 simplement typé

Catégorie des
 substitutions

Catégorie syntaxique
 Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
 iso commutant près.

Bilan

Exponentielles

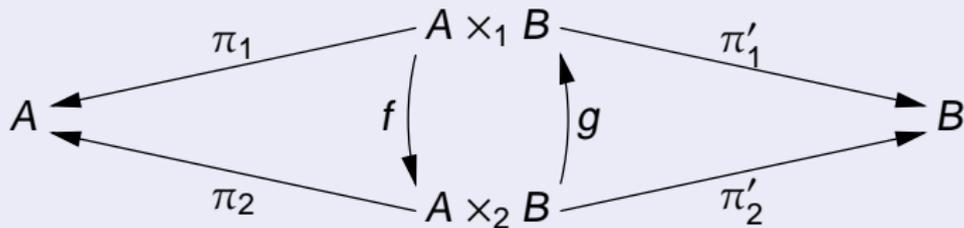
Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
 iso commutant près

Bilan

Preuve



- Or $g \circ f = \langle \pi_1 \circ g \circ f, \pi'_1 \circ g \circ f \rangle_1$ par surj. pairing et

$$\pi_1 \circ g \circ f = \pi_1 \quad \text{et} \quad \pi'_1 \circ g \circ f = \pi'_1$$

(symétriquement).

C'est un iso

Rappels sur le
 λ -calcul
 simplement typé

Catégorie des
 substitutions

Catégorie syntaxique
 Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
 iso commutant près.

Bilan

Exponentielles

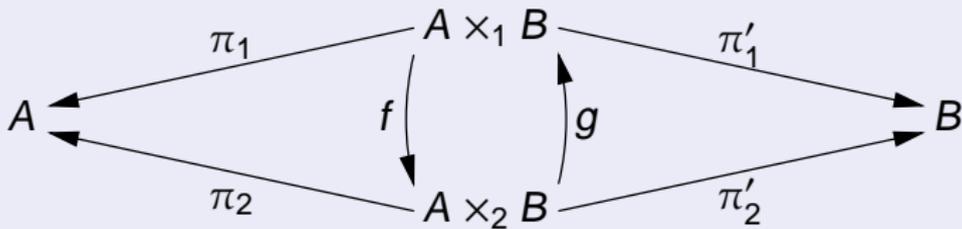
Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
 iso commutant près

Bilan

Preuve



- Or $g \circ f = \langle \pi_1 \circ g \circ f, \pi'_1 \circ g \circ f \rangle_1$ par surj. pairing et

$$\pi_1 \circ g \circ f = \pi_1 \quad \text{et} \quad \pi'_1 \circ g \circ f = \pi'_1$$

(symétriquement).

- Ainsi, $g \circ f = \langle \pi_1, \pi'_1 \rangle_1 = id_{A \times_1 B}$.

C'est un iso

Rappels sur le
 λ -calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près.

Bilan

Exponentielles

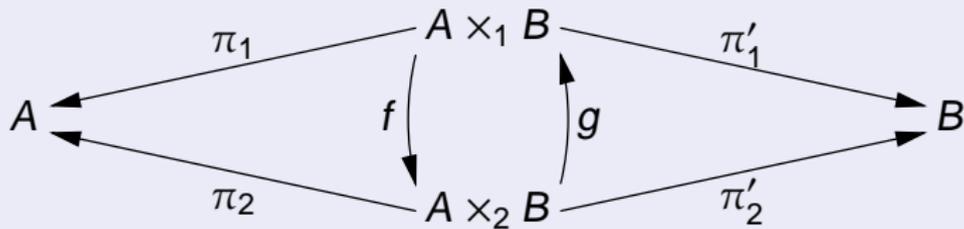
Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

Preuve



- Or $g \circ f = \langle \pi_1 \circ g \circ f, \pi'_1 \circ g \circ f \rangle_1$ par surj. pairing et

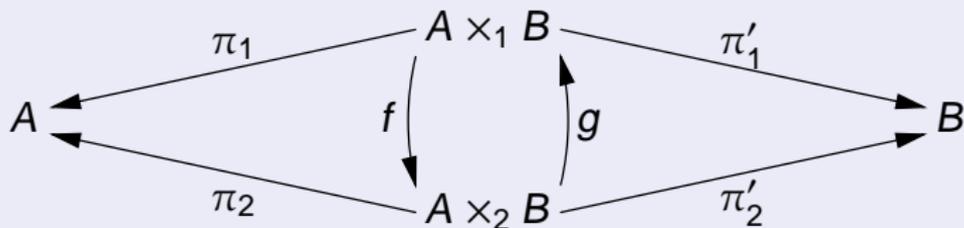
$$\pi_1 \circ g \circ f = \pi_1 \quad \text{et} \quad \pi'_1 \circ g \circ f = \pi'_1$$

(symétriquement).

- Ainsi, $g \circ f = \langle \pi_1, \pi'_1 \rangle_1 = id_{A \times_1 B}$.
- Par symétrie, $f \circ g = id_{A \times_2 B}$.

« Unique isomorphisme commutant »

Preuve



- On sait $f = \langle \pi_2 \circ f, \pi'_2 \circ f \rangle_2$
 $= \langle \pi_1, \pi'_1 \rangle_2,$
- donc tout iso f', g' tel que

$$\begin{aligned}\pi_2 \circ f' &= \pi_1 \\ \pi_1 \circ g' &= \pi_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi'_2 \circ f' &= \pi'_1 \\ \pi'_1 \circ g' &= \pi'_2\end{aligned}$$

donne

$$f' = \langle \pi_1, \pi'_1 \rangle_2 = f$$

$$g' = \langle \pi_2, \pi'_2 \rangle_1 = g.$$

Rappels sur le
 λ -calcul
 simplement typé

Catégorie des
 substitutions

Catégorie syntaxique
 Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
 Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
 iso commutant près.

Bilan

Exponentielles

Définition catégorique
 Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
 iso commutant près

Bilan

Rappels sur le
 λ -calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

Exponentielles

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

- Existence de produits cartésiens dans $\text{Cl}(\Lambda_{\text{ST}})$.
- Catégories :
 - plein de conséquences gratuites et
 - l'assurance que tout va bien se passer.
- Suite : on va de même caractériser le λ catégoriquement.
→ notion de CCC.

Définition catégorique des exponentielles

Rappels sur le λ -calcul simplement typé

Catégorie des substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique iso commutant près
Bilan

Exponentielles

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique iso commutant près

Bilan

On se place dans une catégorie cartésienne.

Définition

$$f \times g = \langle f \circ \pi, g \circ \pi' \rangle.$$

Définition catégorique des exponentielles

$$B^A \times A \xrightarrow{ev} B$$

Rappels sur le
 λ -calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique
iso commutant près
Bilan

Exponentielles

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

(B^A, ev) est une exponentielle de A et B

Définition catégorique des exponentielles

Rappels sur le
 λ -calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

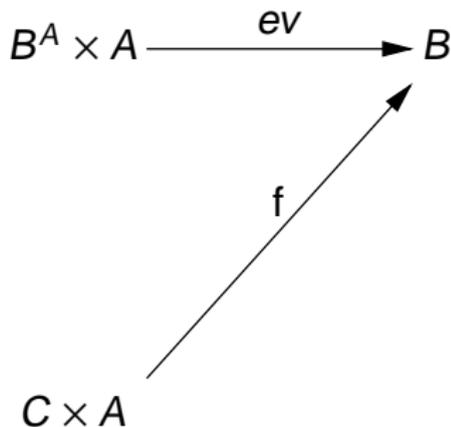
Produit cartésien

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique
iso commutant près
Bilan

Exponentielles

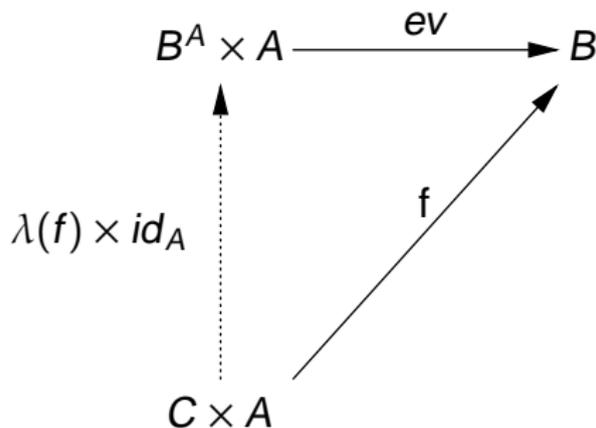
Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan



(B^A, ev) est une exponentielle de A et B

Définition catégorique des exponentielles



(B^A, ev) est une exponentielle de A et B

Rappels sur le
 λ -calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

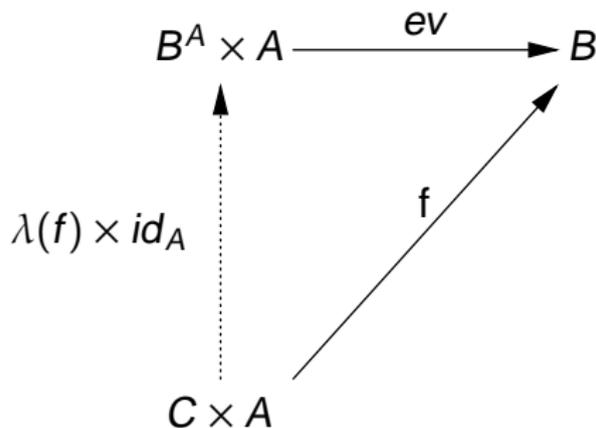
Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique
iso commutant près
Bilan

Exponentielles

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

Définition catégorique des exponentielles



(B^A, ev) est une exponentielle de A et B

Définition

Une catégorie est cartésienne fermée quand elle a tous les produits et toutes les exponentielles.

Rappels sur le λ -calcul simplement typé

Catégorie des substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique iso commutant près
Bilan

Exponentielles

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique iso commutant près

Bilan

$CI(\Lambda_{ST})$ est cartésienne fermée

Rappels sur le λ -calcul simplement typé

Catégorie des substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique iso commutant près

Bilan

Exponentielles

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique iso commutant près

Bilan

- Soient dans $CI(\Lambda_{ST})$: $\Gamma = (x_1 : \tau_1, \dots, x_m : \tau_m)$
 $\Delta = (y_1 : \tau'_1, \dots, y_n : \tau'_n)$.

- On définit $\Delta^\Gamma = \left(\begin{array}{l} y_1 : \tau_1 \rightarrow \dots \rightarrow \tau_m \rightarrow \tau'_1, \\ \dots, \\ y_n : \tau_1 \rightarrow \dots \rightarrow \tau_m \rightarrow \tau'_n. \end{array} \right)$

- Evaluation : $\Delta^\Gamma, \Gamma \vdash \left(\begin{array}{l} y_1 \ x_1 \ \dots \ x_m, \\ \dots, \\ y_n \ x_1 \ \dots \ x_m \end{array} \right) : \Delta$.

- Curryfication de $\Theta, \Gamma \vdash \gamma : \Delta$ (avec $\gamma = (e_1, \dots, e_n)$) :

$$\lambda(\gamma) = \left(\begin{array}{l} \lambda x_1 \ \dots \ \lambda x_m. e_1, \\ \dots, \\ \lambda x_1 \ \dots \ \lambda x_m. e_n \end{array} \right) \text{ dans } \Theta \vdash \Delta^\Gamma.$$

$CI(\Lambda_{ST})$ est cartésienne fermée (commutation)

Rappels sur le
 λ -calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

Exponentielles

Définition catégorique
Application au λ -calcul
Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta^\Gamma \times \Gamma & \xrightarrow{\text{ev}} & \Delta \\
 \uparrow \lambda(\gamma) \times id_\Gamma & \nearrow \gamma & \\
 \Theta \times \Gamma & &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{ev} \circ (\lambda(\gamma) \times id_\Gamma) \\
 &= \text{ev} \circ (\lambda(\gamma), id_\Gamma) \\
 &= (\lambda(\gamma), id_\Gamma)^*(\text{ev}) \\
 &= ((\lambda(x)_i.e)_j, (x)_i)^*(y(x)_i)_j \\
 &= [(y \mapsto \lambda(x)_i.e)_j, (x \mapsto x)_i](y(x)_i)_j \\
 &= ((\lambda(x)_i.e)(x)_i)_j \\
 &= \text{BETA}_{\Theta, \Gamma \vdash \Delta} (e)_j \\
 &= \gamma.
 \end{aligned}$$

CI(Λ_{ST}) est cartésienne fermée (unicité)

Si un autre morphisme $\gamma' = (e')_j$ convient :

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta^\Gamma \times \Gamma & \xrightarrow{ev} & \Delta \\
 \uparrow \lambda(\gamma) \times id & \nearrow \gamma & \\
 \Theta \times \Gamma & &
 \end{array}$$

$\gamma' \times id_\Gamma$ (dashed arrow from $\Theta \times \Gamma$ to $\Delta^\Gamma \times \Gamma$)

On sait

$$\begin{aligned}
 \Theta, \Gamma \vdash ev \circ (\lambda(\gamma) \times id_\Gamma) &= ev \circ (\gamma' \times id_\Gamma) : \Delta \text{ donc} \\
 \Theta, \Gamma \vdash (e)_j &= (e' (x)_i)_j : \Delta.
 \end{aligned}$$

Mais on a aussi :

$$e'_j = \lambda x_1. (e'_j x_1) \quad (\text{ETA at } \tau_1 \rightarrow \dots \tau_n \rightarrow \tau'_j)$$

Rappels sur le
 λ -calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

Exponentielles

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

CI(Λ_{ST}) est cartésienne fermée (unicité)

Si un autre morphisme $\gamma' = (e')_j$ convient :

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta^\Gamma \times \Gamma & \xrightarrow{ev} & \Delta \\
 \uparrow \lambda(\gamma) \times id & \nearrow \gamma & \\
 \Theta \times \Gamma & &
 \end{array}$$

$\gamma' \times id_\Gamma$ (dashed arrow from $\Theta \times \Gamma$ to $\Delta^\Gamma \times \Gamma$)

On sait

$$\begin{aligned}
 \Theta, \Gamma \vdash ev \circ (\lambda(\gamma) \times id_\Gamma) &= ev \circ (\gamma' \times id_\Gamma) : \Delta \text{ donc} \\
 \Theta, \Gamma \vdash (e)_j &= (e' (x)_i)_j : \Delta.
 \end{aligned}$$

Mais on a aussi :

$$e'_j = \lambda x_1. (e'_j x_1)$$

$$(ETA \text{ at } \tau_2 \rightarrow \dots \tau_n \rightarrow \tau'_j)$$

CI(Λ_{ST}) est cartésienne fermée (unicité)

Si un autre morphisme $\gamma' = (e')_j$ convient :

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta^\Gamma \times \Gamma & \xrightarrow{ev} & \Delta \\
 \uparrow \lambda(\gamma) \times id & \nearrow \gamma & \\
 \Theta \times \Gamma & &
 \end{array}$$

$\gamma' \times id_\Gamma$ (dashed arrow from $\Theta \times \Gamma$ to $\Delta^\Gamma \times \Gamma$)

On sait

$$\begin{array}{l}
 \Theta, \Gamma \vdash ev \circ (\lambda(\gamma) \times id_\Gamma) = ev \circ (\gamma' \times id_\Gamma) : \Delta \text{ donc} \\
 \Theta, \Gamma \vdash (e)_j = (e' (x)_i)_j : \Delta.
 \end{array}$$

Mais on a aussi :

$$\begin{array}{l}
 e'_j = \lambda x_1. (e'_j x_1) \\
 = \lambda x_1. \lambda x_2. (e'_j x_1 x_2) \quad (\text{ETA at } \tau_2 \rightarrow \dots \tau_n \rightarrow \tau'_j)
 \end{array}$$

Rappels sur le λ -calcul simplement typé

Catégorie des substitutions

Catégorie syntaxique

Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique iso commutant près

Bilan

Exponentielles

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique iso commutant près

Bilan

CI(Λ_{ST}) est cartésienne fermée (unicité)

Si un autre morphisme $\gamma' = (e')_j$ convient :

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta^\Gamma \times \Gamma & \xrightarrow{ev} & \Delta \\
 \uparrow \lambda(\gamma) \times id & \nearrow \gamma & \\
 \Theta \times \Gamma & &
 \end{array}$$

$\gamma' \times id_\Gamma$ (dashed arrow) $\rightarrow \Delta^\Gamma \times \Gamma$

On sait

$$\begin{aligned}
 \Theta, \Gamma \vdash ev \circ (\lambda(\gamma) \times id_\Gamma) &= ev \circ (\gamma' \times id_\Gamma) : \Delta \text{ donc} \\
 \Theta, \Gamma \vdash (e)_j &= (e' (x)_i)_j : \Delta.
 \end{aligned}$$

Mais on a aussi :

$$\begin{aligned}
 e'_j &= \lambda x_1. (e'_j x_1) \\
 &= \lambda x_1. \lambda x_2. (e'_j x_1 x_2)
 \end{aligned}$$

Rappels sur le
 λ -calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique

Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

Exponentielles

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

CI(Λ_{ST}) est cartésienne fermée (unicité)

Si un autre morphisme $\gamma' = (e')_j$ convient :

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta^\Gamma \times \Gamma & \xrightarrow{ev} & \Delta \\
 \uparrow \lambda(\gamma) \times id & \nearrow \gamma & \\
 \Theta \times \Gamma & &
 \end{array}$$

$\gamma' \times id_\Gamma$ (dashed arrow from $\Theta \times \Gamma$ to $\Delta^\Gamma \times \Gamma$)

On sait

$$\begin{aligned}
 \Theta, \Gamma \vdash ev \circ (\lambda(\gamma) \times id_\Gamma) &= ev \circ (\gamma' \times id_\Gamma) : \Delta \text{ donc} \\
 \Theta, \Gamma \vdash (e)_j &= (e' (x)_i)_j : \Delta.
 \end{aligned}$$

Mais on a aussi :

$$\begin{aligned}
 e'_j &= \lambda x_1. (e'_j x_1) \\
 &= \lambda x_1. \lambda x_2. (e'_j x_1 x_2) \\
 \dots &= \lambda (x)_i. (e'_j (x)_i)
 \end{aligned}$$

Rappels sur le
 λ -calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

Exponentielles

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

CI(Λ_{ST}) est cartésienne fermée (unicité)

Si un autre morphisme $\gamma' = (e')_j$ convient :

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta^\Gamma \times \Gamma & \xrightarrow{ev} & \Delta \\
 \uparrow \lambda(\gamma) \times id & \nearrow \gamma & \\
 \Theta \times \Gamma & &
 \end{array}$$

$\gamma' \times id_\Gamma$ (dashed arrow from $\Theta \times \Gamma$ to $\Delta^\Gamma \times \Gamma$)

On sait

$$\begin{aligned}
 \Theta, \Gamma \vdash ev \circ (\lambda(\gamma) \times id_\Gamma) &= ev \circ (\gamma' \times id_\Gamma) : \Delta \text{ donc} \\
 \Theta, \Gamma \vdash (e)_j &= (e' (x)_i)_j : \Delta.
 \end{aligned}$$

Mais on a aussi :

$$\begin{aligned}
 e'_j &= \lambda x_1. (e'_j x_1) \\
 &= \lambda x_1. \lambda x_2. (e'_j x_1 x_2) \\
 \dots &= \lambda (x)_i. (e'_j (x)_i)
 \end{aligned}$$

Rappels sur le
 λ -calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique
Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

Exponentielles

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

CI(Λ_{ST}) est cartésienne fermée (unicité)

Si un autre morphisme $\gamma' = (e')_j$ convient :

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta^\Gamma \times \Gamma & \xrightarrow{ev} & \Delta \\
 \uparrow \lambda(\gamma) \times id & \nearrow \gamma & \\
 \Theta \times \Gamma & &
 \end{array}$$

$\gamma' \times id_\Gamma$ (dashed arrow from $\Theta \times \Gamma$ to $\Delta^\Gamma \times \Gamma$)

On sait

$$\begin{array}{l}
 \Theta, \Gamma \vdash ev \circ (\lambda(\gamma) \times id_\Gamma) = ev \circ (\gamma' \times id_\Gamma) : \Delta \text{ donc} \\
 \Theta, \Gamma \vdash (e)_j = (e' (x)_i)_j : \Delta.
 \end{array}$$

Mais on a aussi :

$$\begin{aligned}
 e'_j &= \lambda x_1. (e'_j x_1) \\
 &= \lambda x_1. \lambda x_2. (e'_j x_1 x_2) \\
 \dots &= \lambda (x)_i. (e'_j (x)_i) \\
 &= \lambda (x)_i. e_j.
 \end{aligned}$$

Rappels sur le
 λ -calcul
simplement typé

Catégorie des
substitutions

Catégorie syntaxique

Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

Exponentielles

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique
iso commutant près

Bilan

Unicité à unique iso commutant près

Rappels sur le λ -calcul simplement typé

Catégorie des substitutions

Catégorie syntaxique

Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique iso commutant près

Bilan

Exponentielles

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique iso commutant près

Bilan

- Comme pour les produits, deux exponentielles sont toujours isomorphes.
- Il existe un unique iso entre elles commutant aux ev .
- Je vous épargne les détails.
- C'est un résultat catégorique général, pas seulement pour $Cl(\Lambda_{ST})$.

Bilan

- Au départ : construction très syntaxique de $Cl(\Lambda_{ST})$.
- Remplacé par deux axiomes catégoriques :
 - existence de produits cartésiens et
 - existence d'exponentielles.
- Gratos (ni formalisé ni démontré, mais on voit non ?) :
 - La définition du λ -calcul simplement typé s'énonce maintenant en deux mots et en langue naturelle :

Définition

Le λ -calcul simplement typé est la théorie des CCC.

- Une définition (un peu moins) concise pour le λ -calcul non typé :

Définition

Le λ -calcul non typé est la CCC libre engendrée par un objet X , quotientée par l'égalité $X = X^X$.

Rappels sur le λ -calcul simplement typé

Catégorie des substitutions

Catégorie syntaxique

Catégorie sémantique

Produit cartésien

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique

iso commutant près

Bilan

Exponentielles

Définition catégorique

Application au λ -calcul

Unicité (générale) à unique

iso commutant près

Bilan