C. R. Acad. Sci. Paris, t. 320, Série I, p. 1401-1406, 1995

Informatique théorique/*Computer Science*

Une preuve simple de résultats classiques en λ calcul

René DAVID

Résumé – Nous donnons une preuve simple de trois théorèmes « de base » du lambda calcul pur : le théorème de Church-Rosser, le théorème de standardisation et le théorème des développements finis. Nous donnons également une généralisation – dans le lambda calcul pur – du théorème des développements finis qui a comme corollaire immédiat le théorème de normalisation forte dans le système de types simples avec intersection.

A simple proof of basic results in λ calculus

Abstract – *We give a simple proof of three basic theorems of pure lambda calculus: the Church-Rosser theorem, the standardisation theorem and the finiteness of developpements theorem. We also give an extension – in the pure lambda calculus – of the latter that immediately gives the strong normalisation theorem for the type system D (simple types with intersection).*

Abridged English Version – Usually in courses on Lambda Calculus, the Church-Rosser theorem is first proved and then the standardisation theorem and the finiteness of developpements theorem. I give here a complete proof of these theorems by showing first the standardisation theorem, then the finiteness of developpements theorem and finally the Church-Rosser theorem.

NOTATIONS. – Red (t) denotes the set of redexes in t. For $F \subset \text{Red}(t)$, a sequence – finite or infinite – of reductions $t = t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow \ldots$ is an F developpement of t (it is denoted by $t \rightarrow_F t'$ if it is finite and finishes with t') iff the reduced redexes are residues of redexes in F. $t \rightarrow^R t'$ means that t gives t' by reducing the redex R. A sequence – finite or infinite – of reductions $t = t_0 \rightarrow^{R_0} t_1 \rightarrow^{R_1} \ldots$ is a standard reduction (it is denoted $t \longmapsto_{\text{st}} t'$ if it is finite and finishes with t') if there is no pair (i, j) such that $i > j$ and R_i is a residue of a redex in t_j on the left of R_j. And $t \rightarrow_{\text{st}, F} t'$ denotes a sequence of reductions that is both standard and an F developement of t.

SKETCH OF PROOFS. – The standardisation theorem is proved by induction on $\lg(t \rightarrow^* t')$ [where $\lg(t \rightarrow^* t')$ is the length of the reduction $t \rightarrow^* t'$] by showing: 1) that $\rightarrow_{\text{st}}$, $\rightarrow_F$, $\rightarrow_{\text{st}, F}$, are congruences (lemma 1, proved by induction on $(\lg(u \rightarrow u')$, $\text{cxty}(u))$ where $\text{cxty}(u)$ represents the complexity of u) and 2) that if $t \rightarrow_{\text{st}} t_1 \rightarrow^R t_2$ then $t \rightarrow_{\text{st}} t_2$ (lemma 2, proved by induction on $(\lg(t \rightarrow_{\text{st}} t_1)$, $\text{cxty}(t))$.

– The theorem on the finiteness of developpements is proved by induction on $\text{cxty}(t)$, after having proved (lemma 1, proved by induction on $\text{cxty}(t)$, using the theorem I) that if t and $\mathbf{a}$ satisfy the theorem, then so does $t[\mathbf{a}/\mathbf{x}]$, where $\mathbf{a}$ is any sequence of terms.

– The Church-Rosser theorem is proved by showing that $\rightarrow_F$ is confluent. This follows immediately from the standardisation theorem and the fact that $\rightarrow_F$ is strongly normalizing.

– The theorem IV is an immediate consequence of the following extension of the theorem II. First, a slight extension of the notion of redex is necessary to – I believe – better capture the notion of creation of a redex: a term (ab) is a (generalized) redex if $a \rightarrow^* \lambda x a'$. For $F \subset \text{Red}(t)$, associate to every R in F a natural number. Define F developpements as follows: Recursively allow the reduction of the redex S iff the number associated to S is positive. If S is a residue of R, associate to S the same number as the one of R. If S has been created

Note présentée par Gérard HUET.

0764-4442/95/03201401 $ 2.00 © Académie des Sciences

by the reduction of R (and n is associated to R), associate $(n-1)$ to S. With this notion of developpement, every term is strongly normalizing and the proof is essentially the same as the one of the theorem II.

---

0. DÉFINITIONS ET NOTATIONS. – Les notions (notamment celles de résidus) et notations sont standards. Voir [1] ou [2]. L'application de u à v est notée (uv) (*voir* [1]). Le système de types simples avec intersection est le système appelé système D dans [2].

– $t \to t'$ (resp. $t \to {}^* t'$) signifie qu'on passe de t à t' par une (resp. un nombre quelconque de) β réductions. On utilisera indistinctement cette notation pour indiquer que t peut se réduire à t' ou pour représenter une réduction particulière (dans ce cas on notera $\lg(t \to {}^* t')$ la longueur de cette réduction), le contexte indiquant clairement le sens.

– $t \to {}^R t'$ signifie qu'on passe de t à t' en réduisant le radical R.

– cxté(t) représente la complexité de t.

– On note Red(t) l'ensemble des radicaux de t. Soit $F \subset \mathrm{Red}(t)$: une suite – finie ou infinie – de réductions $t = t_0 \to t_1 \to \ldots$ est un F développement de t (et on la notera $t \to {}_F t'$ si elle est finie et se termine par t') si et seulement si les radicaux réduits sont tous des résidus de radicaux dans F. Et $t \to {}_F t'$ est un F développement complet de t si t' ne contient pas de (résidus de) radicaux de F.

– Une suite – finie ou infinie – de réductions $t = t_0 \to {}^{R_0} t_1 \to {}^{R_1} \ldots$ est une réduction standard (et on la notera $t \to {}_{\mathrm{st}} t'$ si elle est finie et se termine par t') si et seulement si il n'y a pas de couple (i, j) tel que $i > j$ et R_i est le résidu d'un radical de t_j qui est à gauche de R_j.

– On notera $t \to {}_{\mathrm{st}, F} t'$ une chaîne de réductions qui est à la fois une réduction standard et un F développement de t.

– Dans toute la suite $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ... représenteront des suites de termes.

– On notera $(u\, a_1\, a_2 \ldots a_n)$ pour $(\ldots(u\, a_1)\, a_2)\ldots)\, a_n)$.

THÉORÈME 1 (de standardisation). – *Si $t \to {}^* t'$ alors $t \to {}_{\mathrm{st}} t'$. De plus cette preuve est constructive et si $t \to {}_F t'$ alors la réduction standard obtenue est aussi un F développement de t.*

COROLLAIRE. – *Si t n'est pas fortement normalisable alors il existe une réduction standard infinie : $t = t_0 \to t_1 \to \ldots$*

THÉORÈME 2 (des développements finis). – *Soit $F \subset \mathrm{Red}(t)$: Il n'existe pas de F développement infini de t.*

THÉORÈME 3 (confluence de la β-réduction). – *Si $t \to {}^* t_1$ et $t \to {}^* t_2$ alors il existe t_3 tel que $t_1 \to {}^* t_3$ et $t_2 \to {}^* t_3$.*

THÉORÈME 4 (de normalisation forte). – *Tout terme typable dans le système de type simple avec intersection est fortement normalisable.*

Remarques. – Les preuves ci-dessous « correspondent » d'une certaine manière à celles qu'on peut trouver dans la thèse de J. J. Levy [3] dans un cadre étiqueté. Dans [3] la standardisation n'est prouvée que dans le cas de termes fortement normalisables.

La notion de radical généralisé introduite au paragraphe IV semble être la « bonne » notion quand on étudie la création de radicaux.

I. PREUVE DU THÉORÈME 1.

LEMME I.1. – *Passent au contexte,* $\to_{\text{st}}$, $\to_F$ *et* $\to_{\text{st},F}$, i.e. *(par exemple) si* $u \to_{\text{st}} u'$, $a \to_{\text{st}} a'$ *alors* $u\,[a/x] \to_{\text{st}} u'\,[a'/x]$, $\lambda\,x\,u \to_{\text{st}} \lambda\,x\,u'$ *et* $(u\,a) \to_{\text{st}} (u'\,a')$.

Preuve (pour $\to_{\text{st}}$, les autres sont identiques). – Le résultat est clair pour $\lambda\,x\,u$ et $(u\,a)$; pour $u\,[a/x]$ on le prouve par récurrence sur $(\lg(u \to_{\text{st}} u'), \text{cxté}(u))$ ordonné lexicographiquement.

– Si $u = \lambda\,y\,v$ ou $u = (y\,\mathrm{v})$ où y est une variable : évident.

– Si $u = (\lambda\,y\,b\,c\,\mathrm{d})$: si le radical $(\lambda\,y\,b\,c)$ n'est pas réduit dans $u \to_{\text{st}} u'$ le résultat est clair, sinon il est réduit en premier et on a $u \to (b\,[c/y]\,\mathrm{d}) \to_{\text{st}} u'$ et $u\,[a/x] \to (b\,[c/y]\mathrm{d})\,[a/x]) \to_{\text{st}} u'\,[a'/x]$ est – par hypothèse de récurrence – standard. ♦

Preuve du théorème. – Par récurrence sur $\lg(t \to^* t')$; il suffit de prouver :

LEMME I.2. – *Si* $t \to_{\text{st}} t_1 \to^R t_2$ *alors* $t \to_{\text{st}} t_2$.

Preuve. – Par récurrence sur $(\lg(t \to_{\text{st}} t_1), \text{cxté}(t))$ ordonné lexicographiquement.

– Si $t = \lambda\,x\,u$ ou $t = (x\,\mathrm{a})$ le résultat est trivial.

– Si $t = (\lambda\,x\,a\,b\,\mathrm{c})$; soit S le radical $(\lambda\,x a\,b)$.

– Si S n'a pas été réduit dans $t \to_{\text{st}} t_1$ alors $t_1 = (\lambda\,x\,a_1\,b_1\,\mathrm{c}_1)$ avec $a \to_{\text{st}} a_1$, $b \to_{\text{st}} b_1$, $\mathrm{c} \to_{\text{st}} \mathrm{c}_1$.

– Si R est le résidu de S alors (par le lemme I.1) $t \to (a\,[b/x]\,\mathrm{c}) \to_{\text{st}} (a_1\,[b_1/x]\,\mathrm{c}_1) = t_2$ est une réduction standard.

– Sinon R est un radical dans a_1 ou dans b_1 ou dans c_1; supposons qu'il est dans a_1 (les autres cas sont identiques) alors $a \to_{\text{st}} a_1 \to^R a_2$ et $t_2 = (\lambda\,x\,a_2\,b_1\,\mathrm{c}_1)$; par hypothèse de récurrence (appliquée à $a \to_{\text{st}} a_1 \to^R a_2$) on a $a \to_{\text{st}} a_2$ et donc (par le lemme I.1) $t \to_{\text{st}} t_2$.

– Si S a été réduit dans $t \to_{\text{st}} t_1$: comme la réduction est standard, il a été réduit en premier donc : $t \to (a\,[b/x]\,c) \to_{\text{st}} t_1$; par hypothèse de récurrence appliquée à $(a\,[b/x]\,c) \to_{\text{st}} t_1 \to^R t_2$ on a $(a\,[b/x]\,c) \to_{\text{st}} t_2$ et donc $t \to_{\text{st}} t_2$. ♦

Preuve du corollaire. – À partir d'une suite infinie de réductions on en construit une qui est standard en itérant le processus suivant : on regarde le radical $(\lambda\,x\,a\,b)$ le plus à gauche; s'il n'est pas réduit au cours de la réduction infinie, a ou b admet une réduction infinie et on itère avec a ou b; sinon on utilise le théorème pour obtenir une nouvelle suite infinie de réductions dans laquelle ce radical est réduit en premier. ♦

II. PREUVE DU THÉORÈME 2.

LEMME II.1. – *Soit t un terme,* a *une suite de termes et* $F \subset \mathrm{Red}(t) \cup \mathrm{Red}(\mathrm{a})$. *Si* $t\,[\mathrm{a}/\mathrm{x}]$ *a un F développement infini, alors il y en a un dans t ou dans l'un des a_i.*

Preuve. – Par récurrence sur $\text{cxté}(t)$.

– Si $t = \lambda\,x\,u$ ou si $t = (y\,\mathrm{b})$ et y n'est pas dans $\mathbf{x}$: trivial.

– Si $t = (x\,\mathrm{b})$: $t\,[\mathrm{a}/\mathrm{x}] = (a\,\mathrm{b}\,[\mathrm{a}/\mathrm{x}])$ or l'application qui est à la racine de $(a\,\mathrm{b}\,[\mathrm{a}/\mathrm{x}])$ ne peut être réduite car ce n'est pas un résidu d'un radical de F et on conclut par récurrence.

– Si $t = (\lambda\,y\,b\,d\,\mathrm{c})$, soit S le radical $(\lambda\,y\,b\,d)$.

– Si aucun résidu de S n'est réduit, l'hypothèse de récurrence permet de conclure.

– Sinon, par le théorème 1 on peut supposer que S est réduit le premier donc $t\,[\mathrm{a}/\mathrm{x}] \to (b\,[\mathrm{a}/\mathrm{x},\ d\,[\mathrm{a}/\mathrm{x}]/y]\,\mathrm{c}\,[\mathrm{a}/\mathrm{x}]) \to_F \ldots$

Or l'application qui est à la racine de $(b\,[\mathrm{a}/\mathrm{x},\ d\,[\mathrm{a}/\mathrm{x}]/y]\,\mathrm{c}\,[\mathrm{a}/\mathrm{x}])$ ne peut être réduite car ce n'est pas un résidu d'un radical de F; on a donc un F développement infini dans $\mathrm{c}\,[\mathrm{a}/\mathrm{x}])$ ou dans $b\,[\mathrm{a}/\mathrm{x},\ d\,[\mathrm{a}/\mathrm{x}]/y]$ et on conclut en utilisant l'hypothèse de récurrence. ♦

Preuve du théorème. – Par récurrence sur cxté(t); on suppose qu'il existe un F développement infini de t.

– Si $t = \lambda x\, u$ ou $t = (x\, \mathrm{a})$ le résultat est trivial.

– Si $t = (\lambda x\, a\, b\, \mathrm{c})$, soit S le radical $(\lambda x\, a\, b)$.

– Si aucun résidu de S n'est réduit, l'hypothèse de récurrence permet de conclure.

– Sinon on a $t \rightarrow_F t_1 = (\lambda x\, a_1\, b_1\, \mathrm{c}_1) \rightarrow_F (a_1\, [b_1/x]\, \mathrm{c}_1) \rightarrow_F ...$; par le théorème 1 on a $t \rightarrow_{\mathrm{st},F} (a_1\, [b_1/x]\, \mathrm{c}_1) \rightarrow_F ...$ et donc $t \rightarrow (a\, [b/x]\, \mathrm{c}) \rightarrow_F (a_1\, [b_1/x]\, \mathrm{c}_1) \rightarrow_F ...$; or l'application qui est à la racine de $(a\, [b/x]\, \mathrm{c})$ ne peut être réduite car ce n'est pas un résidu d'un radical de F, on a donc un F développement infini dans c ou dans $a\, [b/x]$; on conclut en utilisant l'hypothèse de récurrence et le lemme II.1. ♦

III. Preuve du théorème 3.

Lemme III.1. – *La clôture transitive d'une relation qui a la propriété de Church-Rosser a aussi cette propriété.*

Preuve. – Trivial. ♦

En appliquant le lemme III.1 à $\rightarrow_F$ où $F =$Red$\,(t)$, il suffit de prouver :

Lemme III.2. – *Si $t \rightarrow_F t_1$ et $t \rightarrow_F t_2$ alors il existe t_3 tel que $t_1 \rightarrow_F t_3$ et $t_2 \rightarrow_F t_3$.*

Preuve. – Soit $t \rightarrow_F t_1$ et $t \rightarrow_F t_2$; soit $F_i = \{R/R \in \mathrm{Red}\,(t_i),\ R$ résidu d'un radical dans $F\}$; par le lemme III.3 ci-dessous soit $t_i \rightarrow u_i$ un F_i développement complet de t_i, alors $t \rightarrow t_1 \rightarrow u_1$ et $t \rightarrow t_2 \rightarrow u_2$ sont des F développements complets de t donc $u_1 = u_2$. ♦

Lemme III.3. – *Pour tout t et $F \subset \mathrm{Red}\,(t)$ il existe un F développement complet de t; si $t \rightarrow t_1$ et $t \rightarrow t_2$ sont des F développements complets de t alors $t_1 = t_2$.*

Preuve. – L'existence est conséquence immédiate du théorème 2.

Unicité. – Par le théorème 1, il suffit de montrer que si $t \rightarrow_{\mathrm{st},F} t_1$ et $t \rightarrow_{\mathrm{st},F} t_2$ sont des F développements complets alors $t_1 = t_2$. La preuve – par récurrence sur $(\lg\,(t \rightarrow_{\mathrm{st},F} t_1) + \lg\,(t \rightarrow_{\mathrm{st},F} t_2),\ \mathrm{cxt\acute{e}}\,(t))$ – est immédiate. ♦

IV. Preuve du théorème 4. – Le théorème 4 est un corollaire immédiat de la proposition IV.1 et du lemme IV.2. La proposition IV.1 signifie – intuitivement – que si on autorise la réduction des radicaux créés jusqu'à un ordre marqué, alors le théorème des développements finis reste valide.

Définitions. – 1) un radical généralisé est un terme de la forme $(a\, b)$ où $a \rightarrow^* \lambda x\, a'$. On note $G\mathrm{Red}\,(t)$ l'ensemble des radicaux généralisés de t.

2) Soit t un terme. On note $FG\mathrm{Red}\,(t)$ l'ensemble des fonctions de domaine un sous-ensemble de $G\mathrm{Red}\,(t)$ à valeurs dans N.

3) Soit $t \rightarrow^R t'$ et $S \in G\mathrm{Red}\,(t')$. S est créé par la réduction de R si R est de la forme $(\lambda x ... (a\, b) ... c)$, $(a\, b)$ n'est pas un radical généralisé et S est $(a\, [c/x]\, b\, [c/x])$.

Remarque. – Cette notion n'est pas *exactement* la notion usuelle de création. Il y a – avec la notion usuelle – trois situations de création de radicaux : $R = (\lambda x\, \lambda y\, a\, b\, c)$ et $S = (\lambda y\, a\, [b/x]\, c)$, $R = ((\lambda x\, x)\, (\lambda y\, a)\, b)$ et $S = (\lambda y\, a\, b)$, et enfin $R = (\lambda x ... (x\, a) ... \lambda y\, b)$ et $S = (\lambda y\, b\, a\, [\lambda y\, b/x])$. On considère ici que dans les deux premières situations il n'y a pas création : les radicaux – généralisés – étaient déjà présents.

4) Soient t un terme et $F \in FG\ \mathrm{Red}\,(t)$: une suite – finie ou infinie – de réductions $t = t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow ...$ est un F développement de t (et on la notera $t \rightarrow_F t'$ si elle est finie et se termine par t') si et seulement si pour tout radical R réduit $\phi\,(R)$ est défini et positif

où, pour tout $R \in G\,\mathrm{Red}(t_k)$, $\phi(R)$ est défini par récurrence sur k par :
- Si $R \in G\,\mathrm{Red}(t_0)$: $\phi(R) = F(R)$.
- Si $R \in G\,\mathrm{Red}(t_{k+1})$ et R est un résidu de $S \in G\,\mathrm{Red}(t_k)$: $\phi(R) = \phi(S)$.
- Si R est créé par la réduction de S : $\phi(R) = \phi(S) - 1$.

(*Note*. – La notion de résidu – habituellement défini pour les radicaux – se généralise immédiatement aux radicaux généralisés.)

5) Soient t un terme et $F \in FG\,\mathrm{Red}(t)$, t est F fortement normalisable si et seulement si t n'a pas de F développement infini; on note alors $\mathrm{Long}(F, t)$ la longueur du plus grand F développement de t (le lemme de König montre que ce nombre existe).

PROPOSITION IV.1. – *Soit t un terme et $F \in FG\,\mathrm{Red}(t)$. Alors t est F fortement normalisable.*

DÉFINITION. – On définit la hauteur $\mathrm{ht}(a)$ d'un type par :
- Si a est atomique : $\mathrm{ht}(a) = 0$.
- Si $a = b \to c$ ou $a = b \wedge c$: $\mathrm{ht}(a) = \max(\mathrm{ht}(b), \mathrm{ht}(c)) + 1$.

Soit t un terme typé et $R = (a\,b)$ un radical généralisé de t alors $\mathrm{ht}(R) = \mathrm{ht}(\alpha)$ où α est le type de a.

LEMME IV.2. – *Si $t \to {}^R t'$ et $S \in G\,\mathrm{Red}(t')$ est créé par R alors $\mathrm{ht}(S) < \mathrm{ht}(R)$.*

Preuve. – Immédiat. ♦

DÉFINITIONS. – 1) Soient t un terme, $\mathbf{a}$ une suite de termes, $G \in FG\,\mathrm{Red}(t)$, $\mathbf{A} \in FG\ \mathrm{Red}(\mathbf{a})$ et n un entier, on note $\mathrm{Subst}(t, n, G, [\langle x_1, a_1, A_1\rangle, ...])$ la fonction $F \in FG\ \ \mathrm{Red}(t\,[\mathbf{a}/\mathbf{x}])$ définie par $F = G \cup A \cup \{(R, n)/R \in G\,\mathrm{Red}(t\,[\mathbf{a}/\mathbf{x}]) - G\,\mathrm{Red}(t) - \cup G\,\mathrm{Red}(\mathbf{a})\}$.

2) Si $F \in FG\,\mathrm{Red}(t)$ et u est obtenu à partir de sous-termes de t, on parlera encore – pour éviter d'alourdir les notations – de F développement de u au lieu de F' développement où $F' = F \cap (G\,\mathrm{Red}(u) \times N)$.

LEMME IV.3. – *Soit t un terme et $F \in FG\,\mathrm{Red}(t)$; si $t \to {}_F t'$ il existe $F' \in FG\,\mathrm{Red}(t')$ tel que pour tout t'' : $t' \to {}_{F'} t''$ si et seulement si $t \to t' \to t''$ est un F développement. On note $F' = \mathrm{Res}(F, t \to {}_F t')$.*

Preuve. – Immédiat. ♦

LEMME IV.4. – *Soit t un terme et $F \in FG\,\mathrm{Red}(t)$; si $t \to {}_F t'$ alors $t \to {}_{\mathrm{st}, F} t'$.*

Preuve. – Elle est identique à celle du théorème 1.

On montre d'abord l'analogue du lemme I.1, *i.e.* que si $F \in FG\,\mathrm{Red}(u)$, $A \in FG\,\mathrm{Red}(a)$, $u \to {}_{\mathrm{st}, F} u'$ et $a \to {}_{\mathrm{st}, A} a'$, alors $\lambda x\, u \to {}_{\mathrm{st}, F} \lambda x\, u'$, $(u\,a) \to {}_{\mathrm{st}, F\cup A} (u'\,a')$ et $u\,[a/x] \to {}_{\mathrm{st}, F\cup A} u'\,[a'/x]$. On montre ensuite l'analogue du lemme I.2, *i.e.* que si $F \in FG\,\mathrm{Red}(t)$ et $t \to {}_{\mathrm{st}} t_1 \to {}^R t_2$ est un F développement de t, alors $t \to {}_{\mathrm{st}, F} t_2$. On vérifie simultanément que si $t \to {}_{\mathrm{st}, F} t_1$ est la standardisation de $t \to {}_F t_1$, alors $\mathrm{Res}(F, t \to {}_F t_1) = \mathrm{Res}(F, t \to {}_{\mathrm{st}, F} t_1)$. Pour le dernier cas étudié dans cette preuve, on applique l'hypothèse de récurrence à $(a\,[b/x]\,c) \to {}_{\mathrm{st}} t_1 \to {}^R t_2$ et $F' = \mathrm{Res}(F, t \to {}_F (a\,[b/x]\,c))$. ♦

LEMME IV.5. – *Soient t un terme,* $\mathbf{a}$ *une suite de termes, $G \in FG\,\mathrm{Red}(t)$,* $\mathbf{A} \in FG\,\mathrm{Red}(\mathbf{a})$ *et n un entier. Si t* (resp. $\mathbf{a}$) *est G* (resp. $\mathbf{A}$) *fortement normalisable alors* $t\,[\mathbf{a}/\mathbf{x}]$ *est* $\mathrm{Subst}(t, n, G, [\langle \mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{A}\rangle])$ *fortement normalisable.*

Preuve. – Par récurrence sur $(n, \mathrm{Long}(G, t), \mathrm{cxt\acute{e}}(t))$. Raisonnons par l'absurde :
- Si $t = \lambda y\, u$ ou $t = (y\, \mathbf{b})$ et y n'est pas dans $\mathbf{x}$ le résultat est trivial.

– Si $t = (\lambda y\, b\, c\, \mathrm{d})$: si le radical $(\lambda y\, b\, c)$ n'est pas réduit le résultat est trivial, sinon – par le lemme IV.4 – on peut supposer qu'il est réduit en premier : $t\,[\mathrm{a}/\mathrm{x}] \to (b\,[c/y]\,d)\,[\mathrm{a}/\mathrm{x}] \to \ldots$ et on conclut par l'hypothèse de récurrence car Long (Res $(G,\ t \to (b\,[c/y]\,d)),\ (b\,[c/y]\,d)) <$ Long $(G,\ t)$.

– Si $t = (x\, b\, \mathrm{c})$: le seul cas non trivial est celui où il existe un A développement de a aboutissant à $\lambda y\, d$ et que le radical $(\lambda y\, d\, b\,[\mathrm{a}/\mathrm{x}])$ est réduit. Par le lemme IV.4 on peut supposer que le début du développement est : $t\,[\mathrm{a}/\mathrm{x}] \to {}^{*} (\lambda y\, d\, b\,[\mathrm{a}/\mathrm{x}]\ \mathrm{c}\,[\mathrm{a}/\mathrm{x}]) \to (d\,[b\,[\mathrm{a}/\mathrm{x}]/y]\mathrm{c}\,[\mathrm{a}/\mathrm{x}]) \to \ldots$; la suite est un D développement de $(z\, \mathrm{c})\,[\mathrm{a}/\mathrm{x},\, d\,[b\,[\mathrm{a}/\mathrm{x}]/y]/z]$ où $D = \mathrm{Subst}\,((z\,\mathrm{c}),\ n,\ G,\ [\langle \mathrm{x},\ \mathrm{a},\ \mathbf{A} \rangle,\ \langle z,\ d[b\,[\mathrm{a}/\mathrm{x}]/y],\ B \rangle])$ où $B = \mathrm{Subst}\,(d,\ n-1,\ \mathrm{Res}(A,\ a \to \lambda y\, d),\ [\langle y,\ b[\mathrm{a}/\mathrm{x}],\ C \rangle])$ et où $C = \mathrm{Subst}\,(b,\ n,\ G,\ [\langle \mathrm{x},\ \mathrm{a},\ \mathbf{A} \rangle])$. L'hypothèse de récurrence permet de conclure successivement que $b\,[\mathrm{a}/\mathrm{x}]$ est C fortement normalisable, que $d\,[b\,[\mathrm{a}/\mathrm{x}]/y]$ est B fortement normalisable et enfin que $(d\,[b\,[\mathrm{a}/\mathrm{x}]/y]\ \mathrm{c}\,[\mathrm{a}/\mathrm{x}])$ est D fortement normalisable. ♦

Preuve de la proposition IV.1. – Par récurrence sur cxté (t); on suppose qu'il existe un F développement infini de t.

– Si $t = \lambda x\, u$ ou $t = (x\, \mathrm{a})$ le résultat est trivial.

– Si $t = (\lambda x\, a\, b\, \mathrm{c})$, soit S le radical $(\lambda x\, a\, b)$:

– Si aucun résidu de S n'est réduit, l'hypothèse de récurrence permet de conclure.

– Sinon par le lemme IV.4 on peut supposer que S est réduit en premier : $t \to (a\,[b/x]\,\mathrm{c}) \to {}_{F} \ldots$ Soit $n = F\,((\lambda x\, a\, b))$; l'hypothèse de récurrence et le lemme IV.5 permettent de conclure. ♦

Remarque. – On peut également étendre le théorème des développements finis de la manière suivante. Soient t un terme et $F \subset \mathrm{Red}\,(t)$; il n'existe pas de F_{+} développement infini de t où dans un F_{+} développement on s'autorise à réduire les radicaux S créés – au sens usuel du terme – par la réduction de radicaux R dans l'une des situations suivantes :

– $R = (\lambda x\, \lambda y\, a\, b\, c)$ et $S = (\lambda y\, a\,[b/x]\, c)$.

– $R = ((\lambda x\, x)\,(\lambda y\, a)\, b)$ et $S = (\lambda y\, a\, b)$.

Note remise le 15 février 1995, acceptée le 27 mars 1995.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] H. BARENDREGT, *The lambda calculus, its syntax and semantics*, North Holland, 1984.
[2] J. L. KRIVINE, *Lambda Calcul, types et modèles*, Masson, 1992.
[3] J. J. LÉVY, Réductions correctes et optimales dans le lambda calcul, *Thèse*, Université Paris-VII, 1978.

Laboratoire de Mathématiques, Université de Chambéry,
73376 Le Bourget-du-Lac, France.
email david@univ-savoie.fr