LOGIQUE MATHÉMATIQUE. — *Un résultat de consistance relative concernant l'énoncé* $V \doteq WO^\delta$. Note (*) de M. **René David**, présentée par M. Jean Leray.

Nous appliquons la méthode de « forcing » de Cohen à l'étude des rapports possibles entre l'univers V et la hiérarchie des classes WO^δ que Keisler a introduite dans son travail sur le langage L (Q). Nous démontrons qu'il est compatible avec ZF d'avoir $V = WO^\delta \wedge \forall \beta < \delta\, (V \neq WO^\beta)$.

Dans (2) Keisler introduit une relation WO (δ, x) où δ est un ordinal.

Dans ZF cette relation se caractérise par les propriétés suivantes :

– WO $(0, x)$ si et seulement si il existe un bon ordre sur x;

– WO (δ, x) si et seulement si il existe un ordinal λ et une fonction f de domaine λ tels que

$$x = \bigcup_{\mu \in \lambda} f(\mu) \qquad \text{et} \qquad \forall \mu \in \lambda, \quad \exists \gamma \in \delta, \quad \mathrm{WO}(\gamma, f(\mu)).$$

On a en outre

– pour tout ordinal γ et tout ensemble x :

$$\delta \in \gamma \qquad \text{et} \qquad \mathrm{WO}(\delta, x) \;\Rightarrow\; \mathrm{WO}(\gamma, x).$$

Si on note $WO^\infty (x)$ l'énoncé : $\exists\, \delta \in O_n$ WO (δ, x) on peut définir la *hauteur* d'un ensemble x de la classe WO^∞ par $ht(x)$ = le plus petit ordinal δ tel que WO (δ, x). L'axiome du choix est équivalent à $\forall x$ WO $(0, x)$ ou à $\forall x\; ht(x) = 0$.

THÉORÈME 1. — *Soit* M *un modèle transitif dénombrable de* ZF+AF+AC; χ_ξ *un cardinal régulier dans* M; ζ *un ordinal de* M. *Il existe une extension* N *de* M *ayant les mêmes ordinaux, ayant la même fonction* $\alpha \mapsto$ *cofinalité de* α, *telle que* $P(\chi_\alpha)$ *est le même dans* N *que dans* M *pour* $\alpha < \xi$ *et qui satisfait*

1° $ht(P(\chi_\xi)) = \zeta$;

2° $\forall x\; ht(x) \leqq \zeta$.

On démontre ce théorème en donnant une construction explicite de N à partir de M. On construit M (H) une extension générique de M en lui ajoutant par la méthode de Cohen certaines parties de χ_ξ. On prend alors pour N un modèle HDMC où C est un ensemble transitif de M (H).

Nous abrégeons par $V \doteq WO^\delta$ l'énoncé

$$(\exists\, x,\; ht(x) = \delta) \qquad \text{et} \qquad (\forall x,\; ht(x) \leqq \delta).$$

Du théorème 1 on peut établir :

THÉORÈME 2. — *Soit* δ *un ordinal définissable dans* ZF; *si* ZF *est non contradictoire alors* $ZF + V \doteq WO^\delta$ *est aussi non contradictoire.*

DÉFINITIONS. — Dans M on définit la fonction $\delta \leqq \zeta \mapsto F(\delta) = \{$ fonctions de domaine $\zeta - \delta$ à valeurs dans χ_ξ nulles sauf en un nombre fini de points $\}$; on conviendra que $F(\zeta) = \{\varnothing\}$.

Soit D l'ensemble des fonctions dont le domaine est inclus dans $\chi_\xi \times F(0)$ de cardinalité strictement inférieure à χ_ξ, à valeurs dans $\{0, 1\}$. On met sur D l'ordre $p \leqq q$ si et seulement si $p \supset q$.

On choisit une partie H de D qui est un D-générique sur M. On obtient un modèle M (H) qui satisfait ZF+AF+AC, qui a les mêmes ordinaux que M et qui ne change pas la fonction de cofinalité. [*voir* (1), (3)]. Les définitions suivantes se font dans M (H) :

– pour $f \in F(0)$ on pose $a_f = \{\alpha \in \chi_\xi / \exists p \in H, p(\alpha, f) = 1\}$;

– soient $f_1 \in F(\delta_1)$ et $f_2 \in F(\delta_2)$ on pose $f_1 \leqq f_2$ (« f_2 majore f_1 ») si et seulement si $\forall \gamma \in \operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} f_2 \; f_1(\gamma) \leqq f_2(\gamma)$ (*N. B.* Ce n'est pas une relation d'ordre);

– soient $\delta \leqq \zeta$ et $f \in F(\delta)$, on pose si $\delta = 0$, $B(0, f) = \{x / x \subset \chi_\xi$; x ne diffère de a_f ou de son complémentaire que par un sous-ensemble de cardinalité strictement inférieure à $\chi_\xi\}$ si $\delta \neq 0$, $B(\delta, f) = \bigcup_{\substack{h \in F(0) \\ h \text{ prolonge } f}} B(0, h)$;

– soient $\delta + 1 \leqq \zeta$ et $f \in F(\delta + 1)$; on pose $A(\delta + 1, f) =$ la suite indexée par $\gamma \in \chi_\xi$ des $B(\delta, f_\gamma)$ où f_γ est l'élément de $F(\delta)$ obtenu en prolongeant f à δ par la valeur γ.

– soient $\delta \leqq \xi$, δ limite et $f \in F(\delta)$; on pose $A(\delta, f) =$ la suite indexée par $\gamma \in \delta$ des $B(\gamma, f_\gamma)$, où f_γ est l'élément de $F(\gamma)$ obtenu en prolongeant f par 0.

On peut alors définir le modèle N cherché : Dans M (H) soit N la classe des ensembles héréditairement définissables en termes d'éléments de M, de a_f et de $A(\gamma, h)$. On montre que N est de la forme HDMC où C est un ensemble transitif. N est donc un modèle de ZF.

LEMME DE MAJORATION. — *Soit* $\delta \leqq \zeta$ *et* $x \in N$. *Si* N *satisfait :* $x \subset B(\zeta, \varnothing)$ et WO (δ, x) *il existe* $f \in F(\delta)$ *qui majore toutes les fonctions* $g \in F(0)$ *telles que* $a_g \in x$.

En effet parce que WO (δ, x) est satisfait dans N il existe une décomposition de x en sous ensembles x_μ. Cette décomposition est définissable en termes d'un nombre fini de a_h et de $A(\gamma, h)$. On prend pour f une fonction de $F(\delta)$ qui majore tous les h intervenant dans cette définition et on montre le lemme en raisonnant par l'absurde : s'il existe $g \in F(0)$ telle que $a_g \in x$ et qui n'est pas majorée par f, il existe μ tel que $a_g \in x_\mu$. Or on a WO (γ, x_μ) pour un ordinal $\gamma < \delta$. On peut donc utiliser l'hypothèse d'induction, d'où l'existence d'une fonction $f_1 \in F(\gamma)$ vérifiant l'hypothèse pour les éléments de x_μ. On peut alors faire une permutation convenable des a_h [*voir* (1)] et aboutir à une contradiction en trouvant un $a_g \in x$ tel que g ne soit pas majorée par f_1.

On déduit de ce lemme le fait que N satisfait WO $(\delta, B(\zeta, \varnothing))$ pour aucun ordinal $\delta < \zeta$. Il suffit d'appliquer le lemme à $\delta = \zeta$ et $x = B(\zeta, \varnothing)$.

D'où la première partie du résultat car $B(\zeta, \varnothing) \subset P(\chi_\xi)$ et on a $x \subset y$ et WO $(\delta, y) \rightarrow$ WO (δ, x).

Il reste à démontrer que N satisfait : $\forall x$, WO (ζ, x).

LEMME DE DÉCOMPOSITION. — *Soient* $x \in N$ et $\delta \leqq \zeta$. *Supposons que* x *a la propriété suivante (qui a pour paramètre* δ*) : il existe un nombre fini de fonctions* f_i *de* $F(\delta)$ *tel que tout élément de* x *ait une définition en termes d'éléments de* M, *de* a_h *et de* $A(\gamma, h)$ *tels que toutes* *les fonctions h intervenant dans cette définition soient majorées par l'une des* f_i; *alors il existe dans* N *une décomposition de* x *en sous ensembles* x_μ, *indexée par un ordinal* λ *tel que si* $\mu < \lambda$, x_μ *vérifie la même propriété que* x *avec un paramètre* $\gamma < \delta$.

En effet ayant les fonctions f_i et en distinguant le cas où δ est limite ou successeur on obtient la décomposition de x en classant ses éléments suivant les valeurs que prennent les fonctions intervenant dans leur définition à l'ordinal δ. Cette décomposition peut être faite dans N à cause des $A(\gamma_i, f_i)$ définis à cet effet.

On déduit de ce lemme, par induction, que si x a la propriété du lemme pour un ordinal δ alors N satisfait l'énoncé WO (δ, x). Comme tout ensemble de N vérifie cette propriété pour $\delta = \zeta$ on a le résultat souhaité.

(*) Séance du 27 janvier 1975.

(1) Paul J. Cohen, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Benjamin 1966.
(2) H. J. Keisler, *Annals of mathematical logic*, 1, 1970.
(3) J. L. Krivine, *Cours sur la méthode du forcing*.

Faculté des Sciences,
Abidjan, Côte-d'Ivoire.