

UNIVERSITÉ DE SAVOIE  
(Laboratoire de Mathématiques)

**SUR LES COURBES INTÉGRALES  
DU CHAMP DE GRADIENT**

**THÈSE DE DOCTORAT**

*soutenue le 19 décembre 2001  
en vue de l'obtention du grade de Docteur de l'Université de Savoie  
Spécialité : Mathématiques*

*par*

**DIDIER D'ACUNTO**

*devant le Jury composé de :*

**Rapporteurs** MOUSSU Robert, Professeur-Université de Bourgogne Dijon  
PARUSIŃSKI Adam, Professeur-Université d'Angers  
**Examineurs** TROTMAN David, Professeur-Université de Provence, Marseille-**Président du Jury**  
KURDYKA Krzysztof, Professeur-Université de savoie, Chambéry-Directeur de Thèse  
CANO Felipe, Professeur-Université de Valladolid  
ORRO Patrice, Professeur-Université de Savoie, Chambéry



# Remerciements

C'est parfois aux heures les plus étranges de la nuit qu'on se surprend à penser à tous ceux qui ont contribué à l'accomplissement de ce travail. Il n'y a qu'en de tels moments qu'on peut prendre sa plume, fermer les yeux et laisser son esprit vagabonder au gré des notes cristallines, pour se souvenir de toutes ces personnes que j'ai eu plaisir à rencontrer.

Je ne saurais jamais trop remercier Krzysztof Kurdyka pour m'avoir accueilli, ici à Chambéry. Il aura été plus que mon directeur de thèse pendant ces années. Dire que j'ai appris énormément à son contact serait un euphémisme. Je pourrais également écrire beaucoup sur ces années passées aux côtés de Krzysztof, mais ces moments-là sont plus à leur place dans mes souvenirs que sur une feuille de papier.

David Trotman, il y a quelques années maintenant, m'a ouvert les portes de cet univers qu'est la géométrie réelle, en guidant mes premiers pas. Il a grandement contribué à éveiller ma curiosité dans ce domaine. Je suis extrêmement honoré qu'il ait accepté de présider ce Jury.

Robert Moussu a accepté la lecture de ce manuscrit. Il va sans dire qu'il a contribué à améliorer de manière non négligeable la rédaction de cette thèse. Les discussions que nous avons eues m'ont encouragé à étendre certains résultats au modeste prix de quelques heures de sommeil perdues... Je l'en remercie vivement.

Le travail d'Adam Parusiński m'a beaucoup influencé. Ce fut une motivation supplémentaire pour démontrer certains résultats de cette thèse. Je le remercie sincèrement d'avoir accepté de rapporter mon travail et lui exprime toute ma gratitude.

Un étage sépare mon bureau de celui de Patrice Orro, ou seulement quelques rangées de tables quand j'expose en séminaire. Impossible de passer certains détails quand un froncement de sourcils vous incite à développer LE point délicat... Ses remarques et ses questions ont toujours été pertinentes et enrichissantes. Je suis très heureux qu'il ait accepté de faire partie du Jury.

Enfin, je remercie Felipe Cano pour m'avoir fait l'honneur d'être membre du Jury.

Certaines personnes ont compté énormément pour moi tout au long de cette aventure.

Je pense d'abord à Georges Comte qui, de Marseille à Varsovie, a pris le temps de partager mes problèmes mathématiques. Très sincèrement, merci.

Que dire quand on entend venir du fond de la pièce les mots : “*Je suis désolé, mais là j'comprends pas...*” si ce n'est : “*Aïe ! c'est pas bon, ca !*” Au delà de nos discussions géométriques c'est avant tout à la personne même que va une grande part de mes respects. Mon cher Stéphane, ce fut un réel plaisir.

“*Tu vois, le monde se divise en deux catégories, ceux qui font les dessins et ceux qui calculent... Vincent, tu voudrais pas calculer stp... ?*” De la géométrie au foot, en passant par des coups de gueule, des fous rires et autres blagues lourdes mais tellement bonnes ... c'est pas clair ! Tout est dit et tu le sais... “*bon, maintenant on va b... un c... ?*”

Ces années passées au LAMA laisseront en moi le souvenir de moments agréables et enrichissants. J'aimerais en cette occasion remercier sincèrement tous les membres du laboratoire. Je pense particulièrement à Fernand, Patrick (notre BOSS du RdC), Christophe (stp, ma carte son!.. et autres problèmes), Yves (je veux ta thèse sur mon bureau à 17h!), Patrick, et Frédéric.

Une pensée affectueuse pour Nadine (à qui je donne souvent l'ordre de mission... au retour de la mission!!!), ainsi qu'aux autres secrétaires.

Je me lache d'un petit mot et d'un grand salut pour l'ami Kédrik. À tous ceux (et celles !) avec qui j'ai effectué un bout de chemin.

C'est tout naturellement que mes pensées se tournent vers ma famille. Je ne les aurais pas beaucoup vu ces dernières années. Mais ils ne m'en voudront pas trop. À mes parents, ma petite soeur Florence et Raphaël.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>iii</b>
<b>1 Structures o-minimales</b>	<b>1</b>
1.1 Propriétés des structures o-minimales sur le corps des réels . . . . .	1
1.2 Corps de Hardy d'une structure o-minimale . . . . .	6
<b>2 Borne uniforme sur la longueur des trajectoires du champ de gradient</b>	<b>9</b>
2.1 Cas o-minimal . . . . .	10
2.2 Application au cas Polynomial . . . . .	18
<b>3 Valeurs critiques asymptotiques</b>	<b>25</b>
3.1 Valeurs critiques asymptotiques . . . . .	26
3.2 Valeurs critiques asymptotiques généralisées . . . . .	31
3.3 Exemples et Remarques . . . . .	32
<b>4 Courbes intégrales au voisinage d'une fibre atypique</b>	<b>35</b>
4.1 Inégalité de Łojasiewicz . . . . .	35
4.2 Courbes intégrales au voisinage d'un niveau atypique . . . . .	38
4.3 Courbes intégrales de longueur infinie . . . . .	44
<b>5 Courbes intégrales définissables</b>	<b>51</b>
5.1 Courbes intégrales remarquables . . . . .	51
5.2 Séparatrices réelles . . . . .	54
<b>Bibliographie</b>	<b>57</b>



# Introduction

Les théoriciens des modèles (**van den Dries**, **Wilkie**, ou encore **Pillay** et **Steinhorn**) ont remarqué au milieu des années 1980 que de nombreuses propriétés des ensembles et des applications semi-algébriques provenaient de quelques axiomes simples, regroupés dans le concept de structures o-minimales. En 1991, **Wilkie** montre que la structure  $\mathbb{R}_{\text{exp}}$  engendrée par les ensembles semi-algébriques et la fonction exponentielle est o-minimale. On ne considèrera dans ce travail que des structures o-minimales sur le corps des réels. Pour donner une vision schématique du cadre o-minimal, on peut rappeler un résultat important dû à **Miller** (c.f. théorème 1.1.15) qui distingue les structures o-minimales de la façon suivante : celles qui se comportent comme la structure des ensembles semi-algébriques et celles qui contiennent la fonction exponentielle. L'analogie avec la structure des ensembles semi-algébriques est moins évidente dès qu'on étudie la topologie et la géométrie des fonctions définissables. Ceci est d'autant plus vrai pour les structures contenant la fonction exponentielle (on peut voir particulièrement les travaux de **Lion** et **Rolin** pour des problèmes de clôture pfaffienne ou pour des théorèmes de préparation ([Li-Ro])).

Soit maintenant une fonction  $f$  de classe  $C^2$  définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Notons  $K_0(f)$  l'ensemble des valeurs critiques de  $f$ . Supposons  $K_0(f)$  fini et que  $f$  est propre. Alors par le théorème de fibration d'**Ehresmann**,  $f$  est une fibration localement triviale sur chaque composante connexe de  $\mathbb{R} \setminus K_0(f)$ . Si on ôte l'hypothèse de propreté, quelles conditions supplémentaires faut-il sur  $f$  pour obtenir la fibration en dehors d'un ensemble fini de  $\mathbb{R}$  ?

Considérons un polynôme  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ . Alors il existe un ensemble fini,  $\Delta \subset \mathbb{C}$  tel que  $f : \mathbb{C}^n \setminus f^{-1}(\Delta) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \Delta$  est une fibration  $C^\infty$  localement triviale. Par exemple, les travaux de **Parusiński** (cf. [Par]) étudient différentes conditions

suffisantes de trivialisations. Une partie du problème consiste à déterminer un tel ensemble  $\Delta$  qui ne soit pas trop grand. On note  $B_f$  le plus petit ensemble  $\Delta$  pour lequel le résultat précédent est vrai. On dit que  $B_f$  est l'ensemble des points de bifurcations ou valeurs atypiques de  $f$ . Dans tous les cas  $\Delta$  contient les valeurs critiques de  $f$ . Cependant, comme  $f$  peut ne pas être propre,  $\Delta$  peut contenir d'autres valeurs, appelées **valeurs critiques à l'infini**.

Il est naturel d'essayer de réaliser la trivialisations au moyen du champ de gradient de  $f$ . La non propriété éventuelle de  $f$  nécessite alors l'étude du comportement asymptotique de  $\nabla f(x)$  quand  $f(x) \rightarrow t$ ,  $t \in \mathbb{C}$ , pour  $|x| \rightarrow \infty$ . Supposons qu'il existe un voisinage ouvert  $V_t$  de  $t \in \mathbb{C}$ , tel que pour des  $|x|$  suffisamment grand,  $f(x) \in V_t$ . Si la condition suivante, appelée condition de **Malgrange**, est vérifiée :

$$(M) \quad \exists C > 0 \quad |x| \cdot |\nabla f(x)| \geq C,$$

alors  $f$  est une fibration triviale au dessus de  $V_t$  (voir [Par]). En fait, il existe seulement un nombre fini de valeurs  $t \in \mathbb{C}$  au dessus desquelles la condition de Malgrange n'est pas vérifiée. De plus, cette condition est une condition suffisante de trivialisations et permet donc d'expliciter  $\Delta$ .

Dans le cas réel, un résultat plus général fut prouvé récemment par **Kurdyka**, **Orro** et **Simon** pour une application semi-algébrique de classe  $C^2$  ([K-O-S]).

Les résultats précédents ayant lieu dans la catégorie semi-algébrique, on peut donc se demander s'ils ont des analogues pour des fonctions vivant dans une structure o-minimale. Dans l'espoir d'avoir un théorème de trivialisations pour une fonction définissable  $f$ , il faut d'abord localiser les points de  $\mathbb{R}$  au dessus desquels on ne peut pas fibrer. Comme la condition de Malgrange suffit à assurer la trivialisations, il faut décrire l'ensemble des points où cette condition est mise en défaut. Une partie de notre travail consiste à étudier cet ensemble qu'on notera  $K_\infty(f)$ . Un point de  $K_\infty(f)$  s'appelle une valeur critique asymptotique de  $f$ . Si  $f$  est  $C^1$  alors  $K_\infty(f)$  est fini (voir [D'A]). À partir de là, on s'intéresse plus particulièrement aux propriétés des courbes intégrales du champ de gradient d'une telle fonction. En effet, ce travail permet l'étude des hypersurfaces de niveau d'une fonction définissable et des questions relatives



au théorème de fibration (valeurs atypiques, retraction sur un niveau atypique, conjecture de **Thom**...). Toutes ces questions sont liées à la finitude (ou non) de la longueur des courbes intégrales entres deux niveaux.

Au début des années 1970, **Thom** a proposé de comprendre le comportement des trajectoires du champ de gradient au moyen d'outils provenant de la géométrie semi-algébrique et semi-analytique. Les structures o-minimales ayant le même type de propriétés de topologie modérée, on étudiera les questions précédentes dans cet esprit là.

Avant de traiter le cas général d'une fonction définissable définie sur  $\mathbb{R}^n$  tout entier, il est important de rappeler le comportement du champ de gradient d'une fonction définie sur un ouvert borné.

Kurdyka (cf [Ku2]) a montré que, pour une fonction définissable  $f$ , de classe  $C^1$ , définie dans un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , il existe une constante strictement positive,  $M$  disons, qui majore la longueur de toute courbe intégrale du champ de gradient de  $f$ .

Soit maintenant une famille définissable  $\mathcal{F}$  de fonctions de classe  $C^1$ , définies sur des ouverts de  $\mathbb{R}^n$ , tous contenus dans un même compact  $K$ . On obtient alors le théorème suivant qui constitue le résultat principal du **chapitre 2** :

**Théorème 0.1.** *Il existe une constante strictement positive  $M_K$  telle que pour toute fonction définissable  $f \in \mathcal{F}$ , la longueur des courbes intégrales du champ de gradient  $\nabla f$  est majorée par  $M_K$ .*

Bien qu'utilisant des objets similaires à ceux présentés par Kurdyka dans [Ku2], la preuve est sensiblement différente. La technique consiste à comparer pour chaque élément  $f$  de la famille  $\mathcal{F}$ , la longueur des courbes intégrales du champ  $\nabla f$  à celle d'une courbe définissable soigneusement choisie. La borne uniforme s'obtient ensuite à l'aide de la formule de Cauchy-Crofton pour la longueur des courbes.

Dans le cas polynomial, on donne alors une borne uniforme explicite pour la longueur des courbes intégrales du champ de gradient, calculée en fonction du nombre de variables  $n$  et du degré  $d$  du polynôme.

Bien que le reste de ce travail s'attache à étudier des fonctions définissables sur des ouverts non bornés, il est apparu évident de consacrer une partie non négligeable à l'étude de cette borne uniforme. En effet, ce problème met déjà

en avant des valeurs particulières pour la fonction  $f$  que l'on appellera aussi **valeurs critiques asymptotiques**. Elles sont définies de la façon suivante : supposons  $f$  définie sur un ouvert borné  $V$ , l'ensemble des valeurs critiques asymptotiques, noté  $K_a(f)$ , est constitué des valeurs critiques et des valeurs critiques sur le bord de  $V$ . Tout le problème consistait donc à évaluer la longueur des trajectoires du champ de gradient au voisinage des fibres  $f^{-1}(c)$ , pour toutes les valeurs  $c \in K_a(f)$ . Afin d'obtenir la borne  $M_K$ , on a contourné le problème en "évitant" les valeurs critiques asymptotiques.

Les valeurs critiques asymptotiques d'une fonction définissable influencent de manière conséquente le comportement du champ de gradient ainsi que la topologie des fibres. Quand la fonction est définie sur un ouvert borné, il y a seulement un nombre fini de valeurs critiques asymptotiques (cf [Ku2]), et donc un nombre fini de types topologiques pour les fibres de la fonction. Ceci nous amène à considérer ensuite une fonction définissable définie sur un ouvert non borné de  $\mathbb{R}^n$ .

Soit une fonction définissable  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . Comme dans le cas complexe, on étudie le comportement de  $\nabla f(x)$  quand  $|x| \rightarrow \infty$  et  $f(x) \rightarrow c$ . Si on considère les valeurs  $c \in \mathbb{R}$  pour lesquelles on a aussi  $\nabla f(x) \rightarrow 0$ , il est possible que toute valeur  $c$  prise par la fonction  $f$  satisfasse  $\nabla f(x) \rightarrow 0$  quand  $|x|$  devient suffisamment grand au voisinage du niveau  $f^{-1}(c)$  (il existe des fonctions semi-algébriques de deux variables qui ont cette pathologie).

Il est donc indispensable de modifier la définition de valeur critique à l'infini afin de mieux situer les valeurs en lesquelles il y a un changement de type topologique. Comme dans le cas complexe, on considère les valeurs de  $f$  pour lesquelles la condition de Malgrange n'est pas vérifiée. Soit  $|x| \cdot |\nabla f(x)| \rightarrow 0$ . L'ensemble des réels  $c$  ne vérifiant pas la condition de Malgrange, noté  $K_\infty(f)$ , désigne ce qu'on appellera désormais l'ensemble des valeurs critiques à l'infini de  $f$ . On montre dans le **chapitre 3** le théorème suivant :

**Théorème 0.2.** *L'ensemble  $K_\infty(f)$  des valeurs critiques asymptotiques est fini.*

Ainsi, en dehors d'un nombre fini de fibres, correspondant aux valeurs critiques et aux valeurs critiques à l'infini, le champ de gradient  $\nabla f$  vérifie la condition de Malgrange, soit  $|x| \cdot |\nabla f(x)| \geq C$  pour  $x$  situé en dehors d'un

compact de  $\mathbb{R}^n$  et  $C$  une constante strictement positive dépendant du compact.

Ainsi, le champ de gradient réalise la trivialisatation de la fonction  $f$  au dessus de chaque composante connexe de  $\mathbb{R} \setminus (K_\infty(f) \cup K_0(f))$ . Où  $K_0(f)$  désigne l'ensemble des valeurs critiques de la fonction  $f$ .

On généralise ensuite ce résultat dans le cas d'une fonction définissable de classe  $C^1$  définie, cette fois, sur un ouvert non borné  $\Omega$ . Ce qui, d'une certaine façon, revient à redéfinir une métrique Riemannienne complète sur  $\Omega$ .

Le chapitre 3 dit, entre autre, qu'au voisinage d'une valeur critique asymptotique d'une fonction définissable  $f$ , il existe un chemin définissable sur lequel la condition de Malgrange est mise en défaut. À l'aide d'un tel chemin, on donne au début du **chapitre 4**, une inégalité du type Łojasiewicz pour le champ de gradient au voisinage de la valeur critique asymptotique.

**Théorème 0.3 (Inégalité de Łojasiewicz).** *Il existe une fonction définissable  $\psi$  et une constante strictement positive  $C$  telles que, pour  $x$  suffisamment grand et situé sur une fibre voisine de la valeur critique asymptotique, on a :*  
 $|x| \cdot |\nabla(\psi \circ f)(x)| \geq C.$

La construction de  $\psi$  ne produit jamais de fonction bornée au voisinage de la valeur critique asymptotique. Néanmoins, il est possible dans certains cas d'obtenir le même type d'inégalité avec une fonction bornée. Dans un tel cas, comme les courbes intégrales du champ  $\nabla f$  et  $\nabla(\psi \circ f)$  coïncident, la condition de Malgrange est vérifiée pour la fonction  $\psi \circ f$ . On obtient alors la trivialisatation au voisinage de cette valeur critique asymptotique. Cette observation donne, dans le cas d'une structure o-minimale ne contenant pas la fonction exponentielle, une condition suffisante, exprimée en terme d'exposant, pour qu'une valeur critique asymptotique soit une valeur de bifurcation. On dit alors qu'une valeur de bifurcation qui n'est pas une valeur critique est une **valeur atypique à l'infini**.

Dans la suite du **chapitre 4**, on étudie, au moyen du flot du champ de gradient, les changements de type topologique des fibres d'une fonction définissable  $f$ . En effet, si  $c$  est une valeur critique asymptotique qui n'est pas valeur critique, alors le gradient est partout non nul sur  $f^{-1}(c)$ . L'inégalité précédente permet de plonger chaque composante connexe de la fibre  $f^{-1}(c)$  dans une des composantes connexes d'une fibre  $f^{-1}(t)$ , pourvu que l'intervalle  $[t, c[$  (pour fixer

les idées on peut supposer que  $t < c$ ) ne contienne que des valeurs régulières. On obtient ainsi, dans le même esprit que **F. Chazal** (cf [Ch]), un théorème de plongement :

**Théorème 0.4 (Théorème de plongement).** *Il existe une immersion injective ouverte  $\Phi : f^{-1}(c) \rightarrow f^{-1}(t)$  qui plonge chaque composante connexe de  $f^{-1}(c)$  dans une composante connexe du niveau  $f^{-1}(t)$ .*

Ce résultat est encore vrai pour un polynôme  $P : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ . Ce qui constitue en soi un résultat nouveau.

Enfin, soit une fonction définissable  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^2$ . On considère un niveau générique  $t$  et une valeur critique asymptotique  $c$ . On suppose également qu'il n'y a entre  $t$  et  $c$  que des valeurs régulières. Pour chaque composante connexe  $C_0(t)$  du niveau  $f^{-1}(t)$ , l'ensemble  $I(t) \subset f^{-1}(t)$  désigne les points par lesquels passe une courbe intégrale du champ de gradient n'atteignant jamais le niveau  $f^{-1}(c)$ . Si  $I(t)$  est une sous-ensemble propre non vide de  $C_0(t)$ , alors il est homéomorphe à une réunion finie d'intervalles fermés. Cette observation permet de bien définir la différence entre le nombre de composantes connexes de la fibre  $f^{-1}(c)$  et celui de la fibre  $f^{-1}(t)$ .

Au **chapitre 5**, on revient au cas d'une fonction définissable de classe  $C^2$ , définie sur  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\gamma$  une courbe intégrale du champ de gradient  $\nabla f$ . On suppose que  $\gamma$  est de longueur infinie, mais que la fonction  $f$  est bornée sur  $\gamma$ . Ceci revient à dire que la courbe intégrale  $\gamma$  approche, sans jamais l'atteindre, un niveau atypique.

En quelque sorte,  $|\nabla f|$  est très faible sur  $\gamma$ . On pourrait alors croire que  $\gamma$  réalise un minimum local de  $|\nabla f|$  sur les fibres de  $f$ . Ceci est effectivement vrai... à la seule condition que  $\gamma$  soit une droite. Ce résultat fut obtenu alors qu'on essayait de trouver des courbes intégrales définissables et de longueur infinie.

A l'heure actuelle, en toute généralité, on ne sait pas si une telle courbe intégrale reste définissable dans la structure de départ (bien qu'elle soit définissable dans la clôture pfaffienne de la structure o-minimale). Il semble toutefois raisonnable de penser que pour une fonction  $f$  définissable dans une structure o-minimale polynomialement bornée (i.e. qui ne contient pas la fonction ex-

ponentielle), définie sur  $\mathbb{R}^2$ , si  $I(t)$  est un sous-ensemble propre non vide de  $f^{-1}(t)$ , alors  $I(t)$  n'a qu'un nombre fini de points. La question reste ouverte dans le cadre des ensembles semi-algébriques et même dans le cas polynomial. Une réponse positive prouverait l'existence de séparatrices réelles du champ de gradient en nombre fini.



# Chapitre 1

## Structures o-minimales

Ce chapitre a pour but d'énumérer quelques propriétés géométriques des ensembles définissables dans une structure o-minimale sur le corps des réels. On rappelle ici plusieurs résultats classiques et on donne également quelques propriétés supplémentaires des courbes définissables.

### 1.1 Propriétés des structures o-minimales sur le corps des réels

**Définition 1.1.1.** Soit  $\mathcal{M} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_n$  où chaque  $\mathcal{M}_n$  est une famille d'ensembles de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $\mathcal{M}$  est une structure o-minimale sur  $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$  si les axiomes suivants sont vérifiés :

- (i) chaque  $\mathcal{M}_n$  est une algèbre booléenne de sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$ , c'est-à-dire  $\emptyset \in \mathcal{M}_n$ , si  $A, B \in \mathcal{M}_n$  alors  $A \cup B \in \mathcal{M}_n$ ,  $A \cap B \in \mathcal{M}_n$ , et  $\mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{M}_n$ ;
- (ii) si  $A \in \mathcal{M}_n$  et  $B \in \mathcal{M}_m$ , alors  $A \times B \in \mathcal{M}_{n+m}$ ;
- (iii) si  $A \in \mathcal{M}_{n+m}$  et  $\pi_n : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est la projection naturelle sur les  $n$  premières coordonnées, alors  $\pi_n(A) \in \mathcal{M}_n$ ;
- (iv) si  $f, g_1, \dots, g_k \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ , alors  $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0, g_i(x) > 0, i = 1, \dots, k\} \in \mathcal{M}_n$ ;
- (v) Tout ensemble dans  $\mathcal{M}_1$  est réunion finie d'intervalles et de points.

Si  $\mathcal{M}$  vérifie seulement les quatre premiers axiomes, on dit que  $\mathcal{M}$  est une **structure**. L'axiome (v) est appelé axiome d'**o-minimalité**. Étant donnée

une structure o-minimale arbitraire  $\mathcal{M}$ , on dira qu'un ensemble  $A$  est définissable dans  $\mathcal{M}$ , s'il existe un entier  $n$  tel que  $A \in \mathcal{M}_n$ . On dira qu'une fonction  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  est définissable dans  $\mathcal{M}$  si son graphe est un ensemble définissable dans  $\mathcal{M}$ . Dans toute la suite  $\mathcal{M}$  est une structure o-minimale arbitrairement fixée, et définissable sous-entend définissable dans  $\mathcal{M}$ .

L'une des propriétés essentielles des structures o-minimales réside dans le comportement des fonctions définissables d'une variable réelle. Ainsi, on a le résultat suivant :

**Lemme 1.1.2 (Théorème de monotonie [vD]).** *Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définissable, où  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ . Alors il existe des réels  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$  tels que  $f$  est de classe  $C^1$  sur chaque intervalle  $]a_i, a_{i+1}[$ . De plus  $f'$  est strictement monotone ou constante sur tout intervalle  $]a_i, a_{i+1}[$ .*

Dans ce sens, les structures o-minimales se comportent comme la structure des ensembles semi-algébriques. De nombreux résultats comme ceux présentés ci-dessous se généralisent très bien.

**Lemme 1.1.3 (Lemme du petit chemin).** *Soit  $A \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble définissable et soit  $a \in \overline{A \setminus \{a\}}$ . Alors il existe un arc  $\gamma : [0, \epsilon[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  définissable, de classe  $C^1$  tel que  $a = \gamma(0)$  et  $\gamma(]0, \epsilon[) \subset A \setminus \{a\}$ .*

*Preuve.* Voir par exemple [B-C-R] ou [vD]. Notons que la preuve se fait néanmoins en plusieurs étapes. On commence par montrer l'existence d'un chemin définissable. Il suffit ensuite d'appliquer le théorème de monotonie pour obtenir la continuité. En réalité on peut montrer l'existence d'un chemin définissable de régularité  $C^p$ , où  $p$  est un entier aussi grand que l'on veut. ■

Le résultat suivant est une conséquence simple mais néanmoins utile pour la suite, notamment pour le chapitre 3.

**Corollaire 1.1.4 (Lemme du petit chemin à l'infini).** *Soit  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^k$  une application définissable sur un ensemble définissable non borné,  $A \subset \mathbb{R}^n$ . On suppose qu'il existe une suite  $\{x_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  de points de  $A$  telle que  $|x_\nu| \rightarrow +\infty$*



et  $F(x_\nu) \rightarrow a$  quand  $\nu \rightarrow +\infty$ .

Alors il existe un arc  $\gamma : [R, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^n$ , définissable de classe  $C^1$ , et contenu dans  $A$  tel que  $|\gamma(r)| \rightarrow +\infty$  et  $F(\gamma(r)) \rightarrow a$  quand  $r \rightarrow +\infty$ .

*Preuve.* La preuve de ce résultat se fait essentiellement par compactification définissable du graphe de l'application  $F$ , afin de se ramener au conditions du lemme précédent. En effet, si on désigne par  $\Gamma_F$  le graphe de l'application  $F$  et  $\sigma : x \mapsto \frac{x}{|x|^2}$  définie pour  $x \neq 0$ , alors l'application  $(\sigma, id_{\mathbb{R}^k})$  envoie  $\Gamma_F$  sur un ensemble définissable  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$  tel que  $(0, a) \in \overline{\Sigma \setminus \{(0, a)\}}$ . Il suffit alors d'appliquer le lemme 1.1.3 au point  $(0, a)$  et à l'ensemble  $\Sigma$ , puis de décompactifier. ■

Les arcs définissables ont des propriétés élémentaires. Dans les lemmes suivants on établit les notions de sécantes, de tangentes à l'infini ainsi que l'existence et l'unicité de telles droites, pour un arc définissable de longueur infinie.

**Lemme 1.1.5.** *Soit  $\gamma : ]R_0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  un arc définissable de classe  $C^1$  tel que  $\lim_{r \rightarrow +\infty} |\gamma(r)| = +\infty$ . Soit  $S_r = \mathbb{R}\gamma(r)$ , la droite vectorielle passant par le point  $\gamma(r)$ . De la même façon, on définit  $T_r = \mathbb{R}\gamma'(r)$ . Alors  $S_\infty = \lim_{r \rightarrow +\infty} S_r$  et  $T_\infty = \lim_{r \rightarrow +\infty} T_r$  existent et  $S_\infty = T_\infty$ .*

*Preuve.* Si  $\gamma$  est définissable, alors l'application  $r \mapsto S_r$  est définissable, et à valeurs dans un compact. Il suffit de voir  $\Gamma = \{S_r : r > R_0\}$  comme un arc définissable de classe  $C^1$  inclus dans  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ . De plus sa frontière forme un ensemble définissable et de dimension nulle  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ , et la connexité de  $\gamma$  implique l'existence de  $S_\infty$ . L'existence et l'unicité de  $T_\infty$  se prouvent de façon similaire.

Il reste à démontrer l'égalité  $S_\infty = T_\infty$ . Soient  $u$  et  $v$  les vecteurs définis par  $u = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(r)}{|\gamma(r)|}$  et  $v = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\gamma'(r)}{|\gamma'(r)|}$ . Supposons au contraire  $u \neq v$ , alors  $u$  et  $v$  engendrent dans  $\mathbb{R}^n$  un plan  $P$  de dimension 2. Soit  $\gamma_P$  le projeté orthogonal de  $\gamma$  sur  $P$ . Alors asymptotiquement  $\gamma_P$  est le graphe d'une certaine fonction définissable  $g$  (c'est-à-dire  $\gamma_P = \{(x, y) \in P : y = g(x)\}$ ). Remarquons que  $g$  est de signe constant et, si  $x$  est suffisamment grand, alors  $g(x) \neq 0$  dans un

système orthonormal de coordonnées où  $S_\infty$  est la droite d'équation  $y = 0$ . On aurait alors, vu que  $u \neq v$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) \neq 0$ . Ce qui est impossible. Finalement  $u = v$  et  $T_\infty = S_\infty$ . ■

Notons que le lemme précédent est encore vrai en dehors du cadre o-minimal en exigeant seulement que  $\gamma$  soit une courbe non oscillante (cf [C-M-S]).

**Conséquence 1.1.6.** *Si on paramètre  $\gamma$  par la distance à l'origine (i.e.  $|\gamma(r)| = r$ ), alors il existe  $C > 1$  tel que  $1 \leq |\gamma'(r)| < C$  pour tout  $r$  suffisamment grand.*

*Preuve.* En effet, si  $|\gamma(r)| = r$ , alors :

$$2r = (|\gamma|^2)'(r) = \langle \gamma(r), \gamma(r) \rangle' = 2r \cdot |\gamma'(r)| \cdot \cos(\gamma(r), \gamma'(r))$$

C'est-à-dire  $|\gamma'(r)| = \frac{1}{\cos(\gamma(r), \gamma'(r))}$ . Et d'après le lemme 1.1.5 l'angle entre  $T_r$  et  $S_r$  tend vers 0 quand  $r$  tend vers l'infini, soit  $\cos(\gamma(r), \gamma'(r)) \sim 1$ . Donc  $|\gamma'(r)|$  reste voisin de 1 pour  $r$  assez grand. ■

Le résultat suivant est essentiel pour démontrer le lemme 3.1.3.

**Lemme 1.1.7 (lemme d'aile).** *Soient  $V$  et  $S$  deux ensembles définissables tels que  $V \subset \overline{S} \setminus S$ . Alors, il existe un ensemble définissable  $A \subset S$  tel que  $V = \overline{A} \cap (\overline{S} \setminus S)$ .*

*Preuve.* C'est un résultat classique de géométrie semi-algébrique (voir par exemple [B-C-R]). La construction dans le cadre o-minimal est identique. ■

**Théorème 1.1.8 (Choix définissable [vD]).** *Soit  $S \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$  un ensemble définissable et  $\pi_m : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$  la projection naturelle sur les  $m$  premières coordonnées. Alors il existe une application définissable  $f : \pi_m(S) \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que le graphe de  $f$  est inclus dans  $S$ .*

On va maintenant rappeler un résultat très important qui est un peu l'analogue du théorème de monotonie mais pour des ensembles de dimension plus grande. Commençons d'abord par rappeler la définition de cellule définissable. Le théorème qui suit la définition est une généralisation du cas semi-algébrique. Dans ce qui suit on reprend la construction telle qu'elle est donnée dans [Co].

**Définition 1.1.9.** Une décomposition cellulaire cylindrique définissable de  $\mathbb{R}^n$  est une partition finie de  $\mathbb{R}^n$  en ensembles définissables  $(C_i)_{i \in I}$  satisfaisant aux propriétés ci-dessous. Les  $C_i$  sont les cellules de la décomposition cellulaire cylindrique définissable.

$n = 1$  : Une décomposition cellulaire cylindrique définissable de  $\mathbb{R}$  est donnée par une subdivision finie  $a_1 < a_2 < \dots < a_l$  de  $\mathbb{R}$ . Les cellules sont les singletons  $\{a_i\}$ ,  $0 < i \leq l$  et les intervalles  $]a_i, a_{i+1}[$ ,  $0 \leq i \leq l$ , où  $a_0 = -\infty$  et  $a_{l+1} = +\infty$ .

$n > 1$  : Une décomposition cellulaire cylindrique définissable de  $\mathbb{R}^n$  est donnée par une décomposition cellulaire cylindrique définissable de  $\mathbb{R}^{n-1}$  et, pour chaque cellule  $D$  de  $\mathbb{R}^{n-1}$ , des fonctions définissables continues :

$$\zeta_{D,1} < \dots < \zeta_{D,l(D)} : D \rightarrow \mathbb{R}.$$

Les cellules de  $\mathbb{R}^n$  sont les graphes :  $\{(x, \zeta_{D,i}(x)); x \in D\}$ ,  $0 < i \leq l(D)$ , et les bandes :  $(\zeta_{D,i}, \zeta_{D,i+1}) = \{(x, y); x \in D \text{ et } \zeta_{D,i}(x) < y < \zeta_{D,i+1}(x)\}$  pour  $0 \leq i \leq l(D)$ , où  $\zeta_{D,0} = -\infty$  et  $\zeta_{D,l(D)+1} = +\infty$ .

**Théorème 1.1.10 (Décompositon cellulaire [vD]).** Soient  $A_1, \dots, A_k$  des sous-ensembles définissables de  $\mathbb{R}^n$ . Il existe une décomposition cellulaire cylindrique définissable de  $\mathbb{R}^n$  telle que chaque  $A_i$  est une réunion de cellules.

**Remarque 1.1.11.** On peut raffiner la décomposition de sorte que chaque cellule soit  $C^p$ -lisse pour un entier  $p$  arbitrairement fixé.

**Théorème 1.1.12 (Composantes connexes [vD]).** Soit  $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$  une famille définissable de sous ensembles de  $\mathbb{R}^n$ . Alors il existe un entier  $N$  tel que, pour tout  $i \in \mathcal{I}$ ,  $A_i$  possède au plus  $N$  composantes connexes. De plus, chaque composante connexe est définissable.

**Théorème 1.1.13 (Finitude uniforme).** Soient  $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$  un ensemble définissable et  $A_y = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in A\}$ . Si pour tout  $y \in \mathbb{R}^m$  l'ensemble  $A_y$  est fini, alors il existe un entier  $N$  tel que pour tout  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $\text{Card}A_y \leq N$ .

**Définition 1.1.14.** On dit qu'une structure o-minimale  $\mathcal{M}$  est polynomialement bornée si, pour toute fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définissable dans  $\mathcal{M}$ , il existe

un entier  $N$ , tel que pour tout  $x$  suffisamment grand on a :  $|f(x)| \leq x^N$ .

**Théorème 1.1.15 (Théorème de Dichotomie [Mi1]).** *Soit  $\mathcal{M}$  une structure o-minimale, alors soit  $\mathcal{M}$  est polynomialement bornée ou bien la fonction exponentielle est définissable dans  $\mathcal{M}$*

La proposition suivante est une conséquence du théorème de dichotomie.

**Proposition 1.1.16 (Miller).** *Soit  $\mathcal{M}$  une structure o-minimale polynomialement bornée. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définissable et non identiquement nulle au voisinage de l'infini. Alors il existe  $c, r \in \mathbb{R}$ ,  $c \neq 0$ , tel que  $f \sim cx^r$  et la fonction  $]0, +\infty[ \ni x \mapsto x^r$  est définissable dans  $\mathcal{M}$ .*

*Preuve.* La démonstration repose en partie sur le fait que le corps de Hardy (explicité succinctement dans la section suivante) d'une structure o-minimale polynomialement bornée ne possède qu'une seule classe de comparabilité, ce qui signifie en d'autres termes que la fonction  $\frac{xf'}{f}$  possède une limite finie non nulle  $r$ . Il existe donc  $c \neq 0$  tel que pour  $x$  suffisamment grand on a  $f \sim cx^r$ . La deuxième partie de la proposition vient du fait que  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{f(xy)}{f(y)} = x^r$  est une condition définissable (cf. [Mi1] pour une preuve détaillée). ■

## 1.2 Corps de Hardy d'une structure o-minimale

Dans cette section, on notera indifféremment par  $f$  une fonction définie sur un voisinage de  $+\infty$  ainsi que le germe à l'infini de  $f$ .

Pour les preuves des différents résultats qui suivent on pourra regarder les travaux de M. Rosenlicht (cf. [Ro1] et [Ro2]). La théorie est établie dans le cadre général des corps de Hardy et contient des résultats pour les corps de Hardy de rang fini. En fait dans le cas où le corps de Hardy provient d'une structure o-minimale ce rang est soit égal à 1 si la structure est polynomialement bornée, soit infini si la structure o-minimale contient la fonction exponentielle.

**Définition 1.2.1.** *Soit  $\mathcal{H}$  un corps de germes à l'infini de fonctions d'une variable réelle. On dit que  $\mathcal{H}$  est un corps de Hardy si de plus  $\mathcal{H}$  est stable par dérivation. C'est à dire que pour tout germe  $f \in \mathcal{H}$ , le germe  $f' \in \mathcal{H}$ .*

Soit  $k^*$  les éléments de  $\mathcal{H}$  qui possèdent une limite finie non nulle. Alors  $k = k^* \cup \{0\}$  désigne le corps des constantes de  $\mathcal{H}$ . On dira qu'un élément  $f \in \mathcal{H}$  est infiniment croissant si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty$ . Pour tout élément  $f \in \mathcal{H} \setminus k$ , soit  $f$  soit  $\frac{1}{f}$  est infiniment croissant. Dans ce qui suit on comparera la croissance d'éléments infiniment croissants. En effet, pour  $f, g \in \mathcal{H}$ , quitte à remplacer  $f$  par  $-f$  ou  $\pm \frac{1}{f}$  et  $g$  par  $-g$  ou  $\pm \frac{1}{g}$ , on peut toujours supposer que  $f$  et  $g$  sont infiniment croissants.

**Définition 1.2.2 (Classes de Comparabilité).** Soient  $f, g \in \mathcal{H}$ , deux germes infiniment croissants tels que  $f < g$ . On dit que  $f$  et  $g$  sont comparables si il existe un entier  $N$  tel que  $g < f^N$ . On notera  $Cl(f)$  l'ensemble des germes comparables à  $f$ . La relation de comparabilité définit sur chaque classe une relation d'équivalence. Le rang d'un corps de Hardy est le nombre de ses classes de comparabilité.

**Proposition 1.2.3.** Soit  $\mathcal{M}$  une structure o-minimale. Soit  $\mathcal{H}_M$  l'ensemble des germes à l'infini de toutes les fonctions d'une variable réelle définissables dans  $\mathcal{M}$ . Alors  $\mathcal{H}_M$  est un corps de Hardy. De plus si  $\mathcal{M}$  est polynomialement bornée, alors  $\mathcal{H}_M$  possède une unique classe de comparabilité.

La proposition qui suit est une conséquence du résultat précédent. La preuve repose sur l'existence d'une valuation sur les corps de Hardy.

**Proposition 1.2.4.** Soit  $\mathcal{M}$  une structure o-minimale polynomialement bornée. Si  $f \in \mathcal{H}_M \setminus k$ , alors  $\frac{xf'}{f} \in k^*$ .



## Chapitre 2

# Borne uniforme sur la longueur des trajectoires du champ de gradient

Dans [Ku2] Kurdyka a montré que pour une fonction  $f$  définissable,  $C^1$  définie sur un ouvert borné  $V$ , il existe une constante  $A > 0$  telle que la longueur des courbes intégrales maximales du champ de gradient est majorée par  $A$ . Considérons maintenant une famille définissable  $\{f_p\}_{p \in P}$  de fonctions définies sur des ouverts contenus dans un même compact  $K$ . On peut naturellement se poser la question suivante : existe-t-il une constante  $M$  telle que pour tout  $p \in P$ , la longueur des courbes intégrales maximales du champ  $\nabla f_p$  soit majorée par  $M$  ?

Evidemment, l'étude des valeurs critiques des fonctions  $f_p$  posent des problème pour majorer la longueur des courbes intégrales. Les singularités au bord de chaque ouvert posent également des difficultés. La technique utilisée par Kurdyka dans [Ku2] consiste à trouver pour chaque niveau atypique de la fonction définissable  $f$ , une constante  $C > 0$  et une fonction définissable  $\psi$  telles que dans un voisinage d'un niveau atypique on a l'inégalité :  $|\nabla(\psi \circ f)(x)| \geq C$ . Pour des niveaux voisins  $t_1$  et  $t_2$  d'une fibre atypique la borne est donnée par  $\frac{1}{C}|t_1 - t_2|$ . La fonction  $f$  étant bornée sur  $V$ , on obtient alors une bonne majoration.

**Remarque 2.1.** Si l'on veut reproduire la preuve pour le cas d'une famille de fonctions ayant les propriétés ci-dessus, on est amené à considérer le même type d'inégalité avec cette fois, pour chaque valeur  $p$  du paramètre, une constante  $C_p$ . L'obstruction réside donc dans le fait que cette constante peut devenir très proche de 0 lorsqu'on fait varier  $p$ . De cette façon on ne peut pas conclure.

La technique utilisée est finalement toute autre, et consiste à comparer la longueur des courbes intégrales à celle d'une courbe définissable de longueur finie. De cette manière on obtient une borne uniforme pour la longueur des courbes intégrales.

## 2.1 Cas o-minimal

Soit  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définissable, où  $U$  est un ensemble définissable de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$  tel que la famille  $U_p = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, p) \in U\}$  soit uniformément bornée, pour  $p$  variant dans  $\mathbb{R}^k$ . Notons par  $P$  l'ensemble  $\pi_k(U)$ , où  $\pi_k$  désigne la projection naturelle sur les  $k$  dernières coordonnées (i.e.  $\pi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}) = (0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_{n+k})$ ). Compte tenu des notations précédentes,  $P$  sera désigné comme l'espace des paramètres. Notons que pour tout  $p \in \mathbb{R}^k$ , l'ensemble  $U_p$  est définissable, ainsi que l'application  $f_p = F(\cdot, p)$ . C'est à dire que  $\{f_p\}_{p \in P}$  est une famille définissable de fonctions définissables dans la structure o-minimale  $\mathcal{M}$ . On supposera également, que pour tout  $p \in P$ , la fonction  $f_p$  est de classe  $C^1$ .

On va montrer (c.f. théorème 2.1.5) dans cette section, que pour chaque élément  $f_p$  d'une famille définissable de fonctions définies sur des ouverts  $U_p$  (tous contenus dans un même compact), la longueur des trajectoires maximales du champ de gradient est majorée indépendamment du paramètre  $p$ .

On appliquera ensuite le résultat du théorème 2.1.5 pour donner une majoration de la longueur des trajectoires du champ de gradient d'une fonction polynomiale et on donnera une borne effective pour un polynôme générique. L'argument essentiel dans la preuve du théorème 2.1.5 est l'existence d'une borne uniforme pour la longueur d'une famille définissable de courbes contenues dans un même compact. La formule de Cauchy-Crofton appliquée à chaque élément de la famille de courbes donne la majoration uniforme pour la longueur de ces courbes.

**Formule de Cauchy-Crofton 2.1.1.** On reprend ici les arguments sous la même forme que Donaldson (cf [Do]). Après quelques adaptations on replacera les résultats dans le contexte semi-algébrique.

Soit  $H$  l'ensemble des hyperplans affines de  $\mathbb{R}^n$ . Il existe une mesure lisse sur  $H$ , unique à l'échelle près qui est invariante sous l'action transitive du groupe



affine Euclidien. Soit  $\mathcal{C}$  une courbe lisse, compacte, contenue dans la boule unité. Alors presque tout élément  $\Pi \in H$  rencontre transversalement  $\mathcal{C}$  en un nombre fini de points. On note  $i(\Pi, \mathcal{C})$  le nombre de ces points d'intersection. Alors, après une normalisation convenable de la mesure, on a la formule suivante (appelée formule de Cauchy-Crofton) :

$$\text{long}(\mathcal{C}) = \int_H i(\Pi, \mathcal{C}) d\Pi \quad (2.1)$$

**Corollaire 2.1.2.** *Soit  $\Gamma = \{\Gamma_p\}_{p \in P}$  une famille définissable de courbes lisses contenues dans un compact  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Alors, il existe un réel  $m_K > 0$  tel que pour tout  $p \in P$ ,  $\text{long}(\Gamma_p) \leq m_K$ .*

*Preuve.* La preuve repose en partie sur la formule de Cauchy-Crofton. Soit  $\Pi$  un hyperplan d'intersection non vide avec le compact  $K$ . Sauf pour un sous-ensemble de mesure nulle dans l'ensemble des hyperplans affines qui coupent le compact  $K$ ,  $\Pi$  n'a qu'un nombre fini de points d'intersections avec la courbe  $\Gamma_p$ . Soit  $i(\Pi, \Gamma_p)$ , le nombre de points d'intersection entre  $\Pi$  et  $\Gamma_p$ . D'après le théorème de finitude uniforme dans les structures o-minimales, comme l'ensemble des hyperplans affines de  $\mathbb{R}^n$  est définissable, il existe un entier  $i_K(\Gamma_p)$ , tel que pour presque tout  $\Pi \in H$ , on a  $i(\Pi, \Gamma_p) \leq i_K(\Gamma_p)$ . En effet,  $\Pi \cap \Gamma_p$  ne possède qu'un nombre fini de composantes connexes, qui sont donc des points. Grâce au théorème de finitude uniforme, lorsque  $p$  varie dans  $P$ , le nombre  $i_K(\Gamma_p)$  est majoré par un entier indépendamment de  $p$ . On note  $i_K$  cet entier. Ensuite, il suffit de constater que l'ensemble des hyperplans affines d'intersection non vide avec  $K$  est de volume fini,  $V_K$ . On obtient ainsi en appliquant la formule de Cauchy-Crofton à la courbe  $\Gamma_p$  :

$$\text{long}(\Gamma_p) \leq i_K V_K = m_K.$$

**Définition 2.1.3.** *Soit  $f$  une fonction définissable de classe  $C^1$  définie sur un ouvert borné  $V$ . Un réel  $c \in K_a(f)$  si et seulement s'il existe une suite  $\{x_\nu\}$  de points de  $V$ , telle que  $\{f(x_\nu)\} \rightarrow c$  et  $\{\nabla f(x_\nu)\} \rightarrow 0$ . On appelle  $K_a(f)$  l'ensemble des valeurs critiques asymptotiques de  $f$ .*

L'ensemble des  $c$  appartenant à  $K_a(f)$  pour lesquels il existe une suite  $\{x_\nu\}$  convergente dans  $V$ , est l'ensemble des valeurs critiques de la fonction  $f$  au sens usuel. C'est à dire qu'il existe  $x_0 \in V$  tel que  $f(x_0) = c$  et  $\nabla f(x_0) = 0$ . Ainsi,  $K_a(f)$  contient l'ensemble des valeurs critiques de la fonction  $f$ .

Si l'on retire l'hypothèse de compacité relative sur  $V$ , on peut obtenir  $K_a(f)$  aussi grand que l'on veut. Il suffit de prendre la fonction  $f(x, y) = \frac{y}{x}$  définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\}$ . Alors, toutes les valeurs prises par  $f$  sont des valeurs critiques asymptotiques. Ce type de situation peut se produire également pour des polynômes à  $n$  variables, avec  $n \geq 3$ .

D'après Kurdyka, si  $f$  et  $V$  sont comme dans la définition 2.1.3, alors on a la proposition suivante :

**Proposition 2.1.4 ([Ku2]).** *L'ensemble  $K_a(f)$  est fini.*

**Théorème 2.1.5.** *Soient  $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$  et  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définissable. Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $U_p \subset K$  et  $F(\cdot, p) = f_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}$  soit de classe  $C^2$  sur  $U_p$  pour tout  $p \in P$ . Alors il existe un réel  $M_K > 0$  tel que, pour tout  $p \in P$ , la longueur des trajectoires du champ de gradient  $\nabla f_p$  est majorée par  $M_K$ .*

Avant de passer à la démonstration du théorème 2.1.5, nous allons comparer entre elles les longueurs des trajectoires du champ de gradient d'une fonction satisfaisant de bonnes propriétés.

Soient  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définissable de classe  $C^1$  sans valeurs critiques asymptotiques sur un ouvert borné  $V$  et  $Z \subset V$  un ensemble définissable, fermé, tel que pour tout  $t \in f(V)$ , l'ensemble  $Z_t = f^{-1}(t) \cap Z$  est d'intérieur non vide. Soit  $W$  le complémentaire de  $Z$  dans  $V$ . Notons  $W_t$  l'intersection de  $W$  avec le niveau  $f^{-1}(t)$ . Supposons que pour tout  $t \in f(V)$  et pour tout  $x \in W_t$  on a :

$$|\nabla f(x)| \geq \sup\{|\nabla f(y)| : y \in Z_t\}.$$

Pour tout  $x \in V$ , on note  $\alpha_x$  la courbe intégrale du champ de gradient passant par  $x$ . Pour  $\varepsilon > 0$  fixé, on note  $V^\varepsilon(t)$  l'ensemble  $\{y \in V : t - \varepsilon \leq f(y) \leq t + \varepsilon\}$  et  $\alpha_x^\varepsilon = \alpha_x \cap V^\varepsilon(f(x))$ .

Sous ces conditions, on a lemme suivant :

**Lemme 2.1.6.** *Pour tout  $x_0 \in W$ , il existe  $y \in Z_{f(x_0)}$  et  $\varepsilon > 0$  tels que*

$$\text{long}(\alpha_{x_0}^\varepsilon) \leq \text{long}(\alpha_y^\varepsilon).$$

*Preuve.* Par hypothèse,  $Z_{f(x_0)}$  est d'intérieur non vide et contient un point  $y$ . Alors il existe une boule ouverte  $B_y(r)$ , de centre  $y$  et de rayon  $r$ , contenue dans  $Z$  qui contient une partie de la courbe intégrale  $\alpha_y$ . On choisit  $\varepsilon$  de sorte  $\alpha_y^\varepsilon$  soit entièrement contenue dans la boule  $B_y(r)$ . Ensuite, quitte à réduire

$\varepsilon$ , on a :  $\alpha_{x_0}^\varepsilon \cap Z = \emptyset$ . Si on paramètre les courbes intégrales par les niveaux de  $f$  (c'est à dire qu'on intègre le champ  $\frac{\nabla f}{|\nabla f|^2}$ ), alors pour tout  $t \in ]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$  on obtient :

$$|\nabla(f \circ \alpha_{x_0}^\varepsilon)(t)| \geq |\nabla(f \circ \alpha_y^\varepsilon)(t)|.$$

Ce qui donne après intégration :  $\text{long}(\alpha_{x_0}^\varepsilon) \leq \text{long}(\alpha_y^\varepsilon)$ . ■

*Preuve du théorème 2.1.5.* On note  $K_a(f_p)$  l'ensemble des valeurs critiques asymptotiques de la fonction  $f_p$ , et on pose  $K_a(F) = \{\{p\} \times K_a(f_p) : p \in P\}$ . D'après la proposition 2.1.4, pour chaque valeur  $p$  du paramètre, l'ensemble  $K_a(f_p)$  est fini. Ainsi, pour tout  $p \in P$ , soit  $K_a(f_p)$  est vide, soit il existe un entier  $n(p)$  tel que  $K_a(f_p) = \{c_1(p), \dots, c_{n(p)}(p)\}$  où  $c_1(p) < c_2(p) < \dots < c_{n(p)}(p)$ . Il existe une décomposition cellulaire de  $P = \cup_{i \in I} P_i$  (i.e. en nombre fini de cellules définissables), telle que sur chaque cellule,  $n(p)$  est constant et l'ensemble  $K_a(F) \cap \{P_i \times \mathbb{R}\}$  est réunion finie de graphes de fonctions définissables (c'est une conséquence du théorème de finitude uniforme).

On va construire un ensemble définissable  $\Delta \subset U$  à l'intérieur duquel, pour chaque valeur  $p$  du paramètre,  $|\nabla f_p|$  est très petit. La construction reprend en partie celle de [Ku2], à cette exception près qu'on travaille ici non plus avec une seule fonction définissable mais avec une famille définissable de fonctions appartenant à la structure o-minimale  $\mathcal{M}$ .

Soit  $p \in P$  et soit  $\varphi_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  la fonction définissable donnée par :

$$\varphi_p(s) = \inf\{|\nabla f_p(x)| : x \in f_p^{-1}(s)\}.$$

Notons que la fonction  $\varphi$  définie par  $\varphi(s, p) = \varphi_p(s)$  est également définissable. Remarquons aussi (cf. [Ku2]) que si  $s_0 \notin K_a(f_p)$ , alors il existe alors une constante  $c(s_0) > 0$  telle que  $\varphi_p \geq c(s_0) > 0$  au voisinage de  $s_0$ . Soient  $\Delta_p$  et  $\Delta$  les ensembles définis comme suit :

$$\Delta_p = \{x \in U_p \setminus f_p^{-1}[K_a(f_p)] : |\nabla f_p(x)| \leq 2\varphi_p[f_p(x)]\},$$

$$\Delta = \{(x, p) \in U : x \in \Delta_p, p \in P\}.$$

Les ensembles  $\Delta$  et  $\Delta_p$  sont définissables. Remarquons que l'ensemble  $\Delta_p$  vérifie les conditions du lemme 2.1.6. En particulier, son intersection avec un niveau générique est d'intérieur non vide.

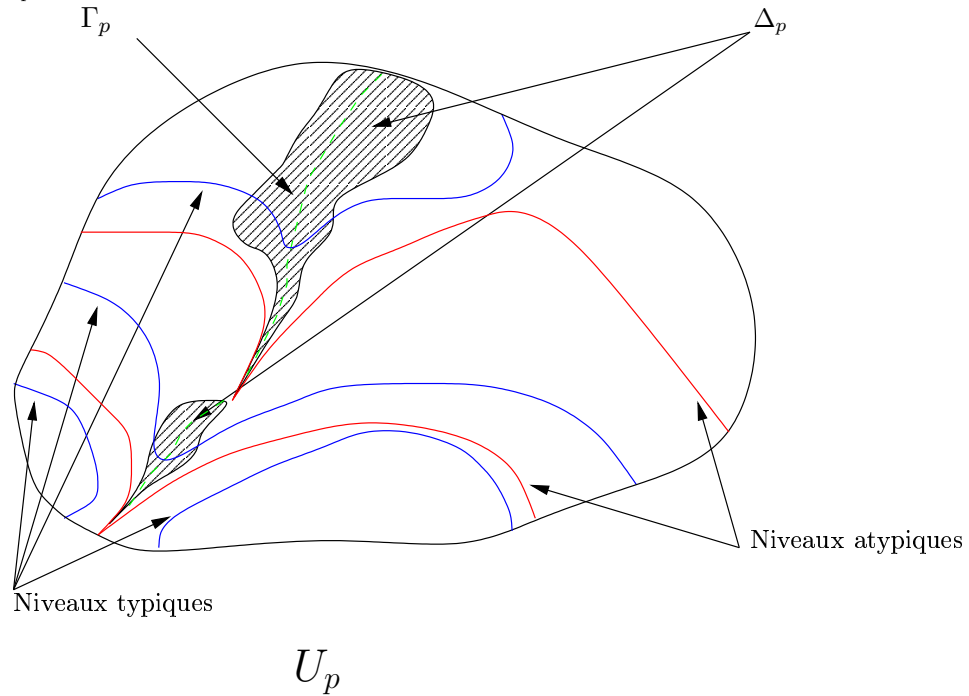
Soient  $f_p$  l'une des fonctions de la famille définissable et  $I = [t_2, t_1]$  un intervalle d'intersection vide avec  $K_a(f_p)$ . Soit  $X_p$  la restriction d'une courbe intégrale  $\tilde{X}_p$  à  $f_p^{-1}(I)$ . Supposons que  $X_p$  est d'intersection non vide avec  $\Delta_p$  et  $U_p \setminus \Delta_p$ .

D'après le lemme 2.1.6, on peut comparer la longueur de chaque composante connexe de  $X_p \cap (U_p \setminus \Delta_p)$  avec la longueur de certaines courbes intégrales contenues dans  $\Delta_p$ .

Il suffit alors d'estimer la longueur des parties de courbes intégrales situées dans  $\Delta_p$  et d'en donner une majoration uniforme (i.e. indépendante de  $p$ ). Notons que les cellules de la décomposition cellulaire de  $P$  sont en nombre fini. Ainsi, il suffit de majorer uniformément la longueur des courbes intégrales des champs de vecteurs  $\nabla f_p$  pour  $p \in P_i$ , où  $P_i$  est l'une quelconque des cellules dans la décomposition précédente de  $P$ . On note alors  $\Delta_i = \{(x, p) \in \Delta : p \in P_i\}$ . Considérons pour cela l'application définissable :

$$\begin{aligned} \sigma : \Delta_i &\longrightarrow \mathbb{R} \times P_i \\ (x, p) &\longmapsto (f_p(x), p) \end{aligned}$$

Alors, d'après le théorème du choix définissable (cf théorème 1.1.8), il existe une section définissable de  $\sigma$ , c'est à dire une application définissable  $\gamma : \sigma(\Delta_i) \rightarrow \Delta_i$  vérifiant :  $\sigma \circ \gamma = \text{Id}_{\sigma(\Delta_i)}$ . Soit  $\Gamma_p = \text{Im} \gamma \cap \Delta_p$ . Pour tout  $p \in P_i$ , la courbe définissable  $\Gamma_p$  est transverse aux fibres de  $f_p$ , sauf peut-être en un nombre fini de points. Par o-minimalité, l'ensemble des points où  $\Gamma_p$  n'est pas de classe  $C^1$  est fini. Ainsi, après avoir éventuellement retiré les niveaux non transverses à  $\Gamma_p$  (également en nombre fini) et ceux où la courbe  $\Gamma_p$  n'est pas de classe  $C^1$ , on peut supposer que  $\Gamma_p$  est  $C^1$  et transverse à toutes les fibres de  $f_p$ . Le dessin suivant donne une idée des différents objets considérés.

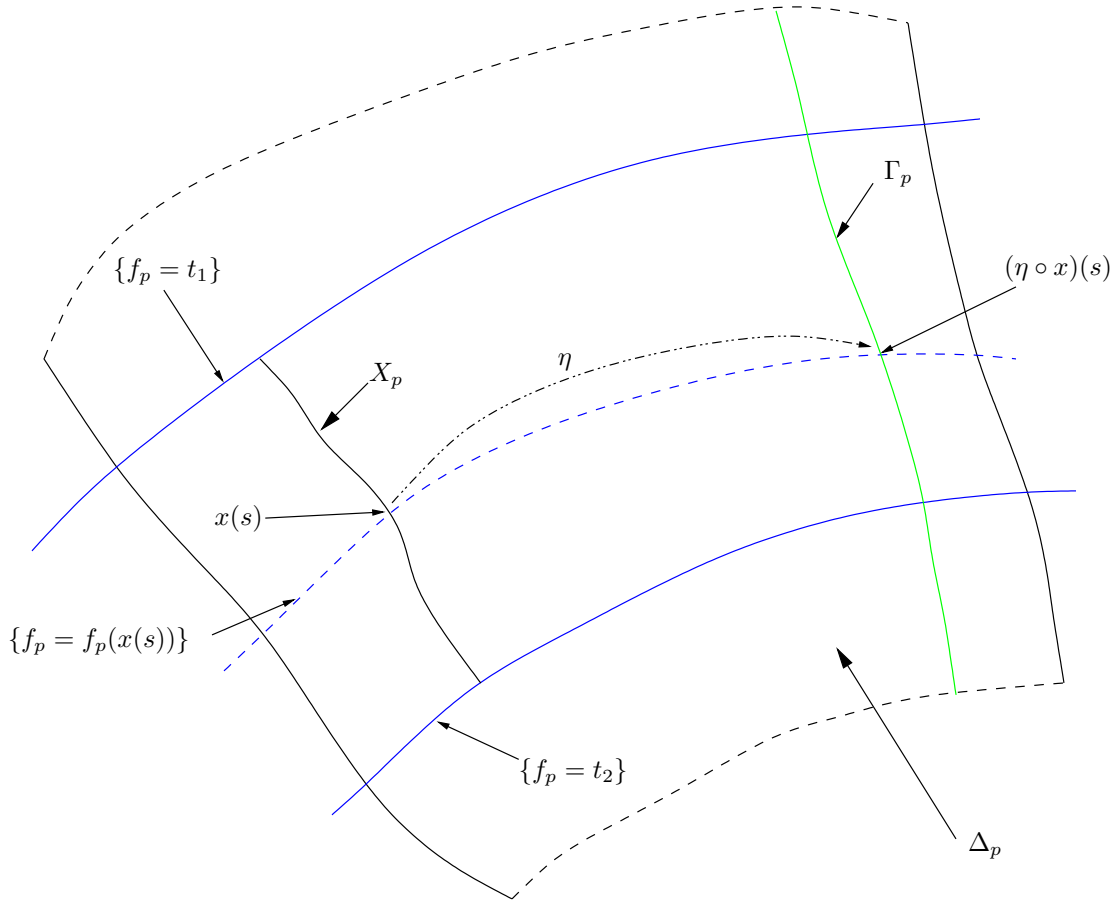


Désormais, on fixe un élément  $p \in P_i$  et, pour un tel  $p$ , on estime les trajectoires du champ  $\nabla f_p$ . Soient  $c(p) \in K_a(f_p)$  et  $t_1, t_2$  des valeurs de  $f_p$  telles que  $t_2 < t_1$  et  $K_a(f_p) \cap [t_2, c(p)] = \emptyset$ . Quitte à effectuer une décomposition cellulaire définissable de  $\Delta_i$ , on peut supposer que la courbe définissable  $\Gamma_p$  est lisse, connexe et transverse aux fibres entre les niveaux  $t_2$  et  $t_1$ .

Soit  $\tilde{X}_p$  une trajectoire du champ de gradient et  $X_p = \tilde{X}_p \cap \{t_2 \leq f_p \leq t_1\}$ . On suppose que  $X_p$  est entièrement contenue dans  $\Delta_p$ . Soient  $x(s)$  et  $\theta(s')$  les paramétrages respectifs de  $X_p$  et  $\Gamma_p$  par leur longueur d'arc  $s$  et  $s'$ , où  $x(0), \theta(0) \in \{f_p = t_2\}$  et les fonctions  $s \mapsto (f \circ x)(s)$  et  $s' \mapsto (f \circ \theta)(s')$  sont strictement croissantes.

Soit  $\eta$  l'application qui à tout point de  $X_p$  associe l'unique point d'intersection du niveau  $\{f_p = f_p(x(s))\}$  avec la courbe  $\Gamma_p$ .

Ainsi, pour un  $s$  fixé le réel  $h(s) = \theta^{-1} \circ \eta \circ x(s)$  représente la longueur de la partie de la courbe  $\Gamma_p$  comprise entre les niveaux  $\{f_p = t_2\}$  et  $\{f_p = f_p(x(s))\}$ , alors que  $s$  est la longueur de  $X_p$  entre ces deux mêmes niveaux.



On va montrer que pour tout  $s$  on a :  $s \leq 2h(s)$ . En effet, puisque  $f[x(s)] = f[\eta(x(s))]$ , en dérivant par rapport à  $s$ , on obtient l'égalité suivante :

$$\langle \nabla f[x(s)], x'(s) \rangle = \langle \nabla f[\eta(x(s))], (\eta \circ x)'(s) \rangle.$$

Soit  $|\nabla f(x(s))| = |\nabla f(\zeta(s))| \cdot |\zeta'(s)| \cdot \cos \alpha(s)$ , avec  $\zeta = \eta \circ x$  et  $\alpha(s)$  l'angle entre les vecteurs  $\nabla f(\zeta(s))$  et  $\zeta'(s)$ .

Comme  $\zeta(s)$  et  $x(s)$  sont contenus dans l'ensemble  $\Delta_p$  on a :

$$|\nabla f(\zeta(s))| \leq 2\varphi(f(\zeta(s))) \leq 2|\nabla f(x(s))|.$$

L'inégalité précédente implique alors :  $|\nabla f(x(s))| \leq 2|\nabla f(x(s))| \cdot |\zeta'(s)| \cdot \cos \alpha$ .

Soit  $|\zeta'(s)| \cdot \cos \alpha \geq \frac{1}{2}$ , ou encore  $|\zeta'(s)| \geq \frac{1}{2}$ .

Puisque  $\theta^{-1} \circ \theta(s) = s$ , on a facilement :  $d\theta_{\zeta(s)}^{-1}(u(s)) = 1$  où  $u(s) = \frac{\zeta'(s)}{|\zeta'(s)|}$ .

C'est à dire :  $h'(s) = |\zeta'(s)| \geq \frac{1}{2}$ . Donc  $h'(s) \geq \frac{1}{2}$ , et  $s \leq 2h(s)$ . Ainsi, pour

tout niveau  $t \in [t_2, t_1]$ , il existe  $s \geq 0$  tel que  $\{f_p = t\} = \{f_p = f_p(x(s))\}$ .

Comme  $h(s)$  représente la longueur de  $\Gamma_p$  entre les niveaux  $t_2$  et  $t$ , on déduit que la longueur de la partie de  $X_p$  située entre les niveaux  $t_2$  et  $t$  est inférieure à deux fois la longueur de la partie de  $\Gamma_p$  située entre ces mêmes niveaux.

L'inégalité reste vraie en passant d'abord à la limite en  $t = t_1$ , puis en faisant

tendre  $t_1$  tend vers  $c(p)$ . D'autre part, quitte à faire une décomposition cellulaire

de  $U_p$ , on peut supposer que  $X_p$  est soit entièrement contenue dans  $\overline{\Delta_p}$

soit  $X_p \cap \overline{\Delta_p} = \emptyset$ . Ainsi, la longueur de toute trajectoire du champ  $\nabla f_p$  est

inférieure à  $2\text{long}(\Gamma_p)$ . Or,  $\Gamma$  est définissable et, pour tout  $p \in P_i$ , la courbe  $\Gamma_p$

est définissable, contenue dans le compact  $K$  et de longueur finie. Et d'après

le corollaire 2.1.2, il existe une constante  $m_{K,P_i} > 0$  telle que pour tout  $p \in P_i$ ,

$\text{long}(\Gamma_p) \leq m_{K,P_i}$ . Posons  $M_{K,i} = 2m_{K,P_i}$ . Comme  $P$  est réunion finie de telles

cellules  $P_i$ , en posant  $M_K = \max_i \{M_{K,i}\}$ , on obtient la majoration uniforme

voulue. ■

On considère maintenant une famille définissable  $F$  qui vérifie les mêmes

hypothèses que dans le théorème 2.1.5 sauf que les ouverts  $U_p$  ne sont plus

contenus dans un compact  $K$ , mais sont seulement bornés. Pour tout ouvert

$U_p$  on note  $D_p$  le diamètre de l'enveloppe convexe de  $U_p$ . Notons également

$M_1$  la borne obtenue dans le théorème 2.1.5 pour  $K = \overline{\mathbb{B}^n}$  la boule unité fermée

dans  $\mathbb{R}^n$  muni de la métrique euclidienne. Alors on a le corollaire suivant :

**Corollaire 2.1.7.** *Pour toute trajectoire  $\beta_p \subset U_p$  du champ  $\nabla f_p$  on a :*

$$\text{long}(\beta_p) \leq D_p M_1.$$

*Preuve.* Soit  $f_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}$  un des éléments de la famille  $F$ . Alors il existe  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tel que  $U_p \subset B(x_0, D_p)$ . Soient  $t \mapsto \beta_p(t)$  une courbe intégrale du champ  $\nabla f_p$  dans  $U_p$  et  $T : \mathbb{B}^n \ni X \mapsto x_0 + D_p X \in B(x_0, D_p)$ . On pose  $g_p = f_p \circ T$ . Ainsi la famille de fonctions  $\{g_p\}_{p \in P}$  est définissable et chaque fonction  $g_p$  est définie sur un ouvert contenu dans  $\overline{\mathbb{B}^n}$ . Si  $x = x_0 + D_p X$ , on obtient  $\nabla g_p(X) = D_p \nabla f_p(x)$ . Comme  $\dot{\beta}_p(t) = \nabla f_p(\beta_p(t))$  et  $\dot{\beta}_p(t) = D_p \dot{\alpha}_p(t)$ , alors  $D_p \dot{\alpha}_p(t) = \frac{1}{D_p} \nabla g_p(\alpha_p(t))$ . Ainsi la courbe  $\alpha_p$  est une courbe intégrale du champ  $\nabla \tilde{g}_p$  contenue dans  $\mathbb{B}^n$ , où  $\tilde{g}_p = \frac{1}{D_p^2} g_p$ . La famille  $\{\tilde{g}_p\}_{p \in P}$  est encore une famille définissable vérifiant les hypothèses du théorème 2.1.5. Ainsi la longueur de la courbe intégrale  $\alpha_p$  est majorée par la constante  $M_1$ . Ceci implique  $\text{long}(\beta_p) \leq D_p M_1$ . ■

## 2.2 Application au cas Polynomial

Dans le cas polynomial, on peut donner une majoration de la longueur des trajectoires en fonction du nombre de variables et du degré du polynôme. Dans ce qui suit on considère un polynôme  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de degré  $d$ . Soit  $t \mapsto \alpha(t) \in \mathbb{B}^n$  une courbe intégrale du champ  $\nabla f$ , où  $\mathbb{B}^n$  désigne la boule unité dans  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire euclidien. On note indifféremment par  $\alpha$  la courbe intégrale et son image dans la boule unité. Ainsi, du théorème 2.1.5 on déduit le corollaire suivant :

**Corollaire 2.2.1.** *Soient  $n, d \in \mathbb{N}$ , et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  un polynôme de degré  $d$ . Soit  $\alpha \subset \mathbb{B}^n$  l'image d'une courbe intégrale de  $\nabla f$  dans  $\mathbb{B}^n$ . Alors il existe une constante  $A(n, d)$  ne dépendant que de  $n$  et  $d$  telle que  $\text{long}(\alpha) \leq A(n, d)$ .*

*Preuve.* Il suffit d'appliquer le théorème 2.1.5 à la famille des polynômes à  $n$  variables et de degré inférieur ou égal à  $d$ . L'espace des paramètres de la famille est l'espace des coefficients de ces polynômes (i.e.  $\mathbb{R}^D$  pour un certain  $D \in \mathbb{N}$ ). Cette famille étant semi-algébrique, on obtient une majoration pour la longueur des courbes intégrales qui est indépendante du choix du paramètre, c'est à dire indépendante du choix des coefficients du polynôme. Donc  $A$  dépend uniquement de  $n$  et  $d$ . ■

**Corollaire 2.2.2.** *Soient  $f$  un polynôme vérifiant les hypothèses du corollaire 2.2.1 et  $\beta \subset B(x_0, r)$  l'image d'une courbe intégrale du champ  $\nabla f$  dans la boule ouverte de  $\mathbb{R}^n$  de centre  $x_0$  et de rayon  $r$ . Alors  $\text{long}(\beta) \leq rA(n, d)$ .*

*Preuve.* C'est une conséquence directe du corollaire 2.1.7. Ainsi la longueur des courbes intégrales est majorée par une constante linéaire en  $r$ . ■

### Estimation de la constante $A(n, d)$ .

Pour un polynôme donné  $f$ , on peut déterminer dans  $\overline{\mathbb{B}^n(1)}$  l'ensemble des points où la fonction  $|\nabla f|$  admet un minimum sur les niveaux de  $f$ . Plus exactement, on montre que les minima de  $|\nabla f|$  sur les niveaux de  $f$  sont contenu dans la réunion de deux ensembles algébriques, chacun défini localement par  $n - 1$  équations polynomiales. Ces deux ensembles définissent génériquement (voir proposition 2.2.3) des courbes algébriques réelles  $\Gamma_1 \subset \mathbb{B}^n(1)$  et  $\Gamma_2 \subset \mathbb{S}^{n-1}(1)$ . Sur certains niveaux de  $f$ , le minimum de  $|\nabla f|$  sera atteint en un point de  $\Gamma_1$ , alors que pour d'autres niveaux, il sera atteint en un point de  $\Gamma_2$ . On compare ensuite la longueur des courbes intégrales (maximales dans  $\mathbb{B}^n(1)$ ) du champ  $\nabla f$  avec la longueur des courbes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

Le lieu des minima de  $|\nabla f|^2$  sur les niveaux de  $f$  (qui est le même que celui de  $|\nabla f|$  tout en étant plus commode à manipuler) est contenu l'ensemble des points critiques de la fonction  $|\nabla f|^2$  restreinte aux niveaux de  $f$ . Notons  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  et  $\mathbb{R}_d[X]$  l'espace des polynômes à  $n$  indéterminées de degré inférieur ou égal à  $d$  ( $d \geq 2$ ). La proposition qui suit montre que les points de tangence entre les niveaux d'un polynôme  $f$  de degré  $d$  fixé et les niveaux du polynôme  $|\nabla f|^2$  définissent génériquement des courbes algébriques réelles.

**Proposition 2.2.3.** *Il existe un ensemble semi-algébrique  $E_d$  de codimension supérieure ou égale à 1 tel que, pour tout polynôme  $f \in \mathbb{R}_d[\mathbf{X}] \setminus E_d$ , l'ensemble  $\Theta = \{x \in \mathbb{R}^n : d(|\nabla f|^2) \wedge df = 0\}$  est soit vide, soit réunion finie de courbes algébriques.*

*Preuve.* Notons  $S_n(\mathbb{R})$  le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de  $M_n(\mathbb{R})$ . Considérons maintenant le sous-ensemble  $\Sigma$  de  $\mathbb{R}^n \times S_n(\mathbb{R})$  défini comme suit :

$$\Sigma := \{(V, H) \in \mathbb{R}^n \times S_n(\mathbb{R}) : \exists \lambda \in \mathbb{R} : H \cdot V = \lambda V\}$$



Alors on remarque que  $\Sigma$  est un ensemble algébrique de codimension  $n - 1$ . Soit maintenant un polynôme  $f$  de degré au plus  $d$ . Un point  $x \in \mathbb{R}^n$  appartient à  $\Theta$  si et seulement si  $(\nabla f(x), H_f(x))$  appartient à  $\Sigma$ .

On va construire une application à partir d'une certaine déformation de  $f$ , qui va être une submersion sur  $\mathbb{R}^n \times S_n(\mathbb{R})$ . Soit  $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la déformation de  $f$  construite comme suit :

$$\tilde{f}(\alpha, \varepsilon, x) = f(x) + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \sum_{1 \leq j < k \leq n} \varepsilon_{j,k} x_j x_k$$

Notons maintenant  $\nabla \tilde{f}$  pour le champ de vecteur  $\nabla \tilde{f}_{\alpha, \varepsilon} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$  et  $H_{\tilde{f}}$  la matrice symétrique  $\left( \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ . Notons  $S$  l'espace des paramètres  $(\alpha, \varepsilon)$ . Considérons maintenant l'application suivante :

$$\begin{aligned} \Psi : S \times \mathbb{R}^n &= \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \times S_n(\mathbb{R}) \\ &(\alpha_i, \varepsilon_{j,k}, x) \longmapsto (\nabla \tilde{f}, H_{\tilde{f}}) \end{aligned}$$

Alors en calculant la différentielle en un point quelconque de  $\Psi$  dans les directions  $\alpha$  et  $\varepsilon$ , on voit que le mineur maximal correspondant à ces directions a pour déterminant 1. Ainsi  $\Psi$  est une submersion. Par un théorème de transversalité à paramètres, on en déduit que pour un ouvert semi-algébrique dense de l'espace des paramètres  $S$ , l'application  $\Psi_{\alpha, \varepsilon} = \Psi(\alpha, \varepsilon, \cdot)$  est transverse à  $\Sigma$ . Ceci signifie donc que les niveaux des fonctions  $\tilde{f}_{\alpha, \varepsilon}$  et  $|\nabla \tilde{f}_{\alpha, \varepsilon}|^2$  sont tangents le long d'une courbe algébrique pour tout  $(\alpha, \varepsilon)$  dans cet ouvert. ■

**Corollaire 2.2.4.** *Soit  $f$  un polynôme de  $\mathbb{R}^n$  de degré inférieur ou égal à  $d$  (pour  $d \geq 2$ ). Soit  $g = f|_{\mathbb{S}^{n-1}}$ . Alors il existe un ensemble semi-algébrique  $F_d$  de codimension supérieure ou égale à 1 tel que pour tout polynôme  $f \in \mathbb{R}_d[\mathbf{X}] \setminus F_d$ , l'ensemble  $\Theta = \{x \in \mathbb{S}^{n-1} : d(|\nabla g|^2) \wedge dg = 0\}$  est une réunion finie de courbes algébriques.*

*Preuve.* La démonstration précédente est similaire en remplaçant  $\mathbb{R}^n$  par une sous-variété semi-algébrique à bord. ■

**Proposition 2.2.5.** *Soient  $n$  et  $d$  ( $d \geq 2$ ) des entiers. Alors il existe un ensemble semi-algébrique  $G_d \subset \mathbb{R}_d[\mathbf{X}]$  de codimension supérieure à 1 tel que pour tout polynôme  $f \in \mathbb{R}_d[\mathbf{X}] \setminus G_d$ , la longueur des courbes intégrales de  $\nabla f$  dans  $\mathbb{B}^n(1)$  est majorée par*

$$A(n, d) = 2V(n)((3d - 4)^{n-1} + 2(3d)^{n-2})$$

où  $V(n)$  est une constante dépendant uniquement de  $n$ .

*Preuve.* Il suffit de prendre  $G_d = E_d \cup F_d$ . Dans le cas polynomial la preuve du théorème 2.1.5 met en évidence une section semialgébrique  $\Gamma$ . Étant donné un polynôme  $f$  de degré  $d \geq 2$  appartenant au complémentaire de  $G_d$ , on va construire explicitement cette section  $\Gamma$ . Plus précisément, on cherche dans l'adhérence de la boule unité, l'ensemble des points qui réalisent le minimum de  $|\nabla f|^2$  sur les niveaux de  $f$ .

Alors, quand ce minimum est effectivement réalisé dans la boule ouverte  $\mathbb{B}^n$  l'ensemble des points qui le réalisent est contenu dans l'ensemble :

$$\Gamma_1 = \{x \in \mathbb{B}^n(1) : d(|\nabla f|^2) \wedge df = 0\}.$$

En d'autres termes, l'ensemble  $\Gamma_1$  désigne l'ensemble des points sur les fibres de  $f$  où le vecteur  $\nabla f$  est colinéaire au vecteur  $H_f(x)\nabla f$ . Ainsi  $\Gamma_1$  est le noyau d'une 2-forme différentielle à coefficients polynomiaux dont le degré n'excède pas  $3d - 4$ .

Il se peut néanmoins que le minimum de  $|\nabla f|^2$  ne soit pas atteint sur la boule ouverte  $\mathbb{B}^n$ . Il est donc nécessaire de déterminer le lieu des minima de la fonction  $|\nabla f|^2$  sur  $S_t = S^{n-1} \cap \{f = t\}$ .

Soit  $g = f|_{S^{n-1}}$ . Alors les extrema de la fonction  $|\nabla f|^2$  sur les ensembles  $S_t$  sont contenus dans :

$$\Gamma_2 = \{x \in S^{n-1} : d(|\nabla g|^2) \wedge dg = 0\}.$$

L'ensemble  $\Gamma_2$  est l'ensemble des points  $x \in S^{n-1}$  pour lesquels les projections de  $\nabla f$  et  $\nabla(|\nabla f|^2)$  sur  $T_x S^{n-1}$  sont colinéaires.

Posons  $h(x) = |\nabla f|^2(x)$  et notons  $p(x)$  et  $q(x)$  les projetés respectif de  $\nabla f$  et  $\nabla h$  sur l'espace tangent à la sphère unité en  $x$ . On pose  $n_x = \frac{x}{|x|}$ .

On a alors  $p(x) = \nabla f - \langle \nabla f, n_x \rangle n_x$  et  $q(x) = \nabla h - \langle \nabla h, n_x \rangle n_x$ . Pour continuer à travailler avec des fonctions polynomiales, on va expliciter l'ensemble des  $x \in S^{n-1}$  pour lesquels  $|x|^2 p(x)$  et  $|x|^2 q(x)$  sont colinéaires.

Rappelons que  $\nabla h(x) = 2H_f(x)\nabla f(x)$ . La fonction  $f$  étant de degré  $d$ ,  $\nabla h$  est alors de degré au plus  $2d - 3$ . Ainsi on voit facilement que  $|x|^2 p(x)$  et  $|x|^2 q(x)$  sont des champs de vecteurs polynomiaux de degré respectifs au plus à  $d + 1$  et  $2d - 1$ .

Soient  $p_i(x)$  et  $q_i(x)$  les coordonnées respectives des vecteurs  $|x|^2 p(x)$  et  $|x|^2 q(x)$ . Ces vecteurs vivent dans l'espace tangent à la sphère unité vu comme  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

Après avoir choisi soigneusement une base de  $\mathbb{R}^{n-1}$ , on peut supposer que les  $n-1$  coordonnées des vecteurs  $|x|^2 p(x)$  et  $|x|^2 q(x)$  sont non nulles. Notons  $r_1(x), \dots, r_{n-1}(x)$  et  $s_1(x), \dots, s_{n-1}(x)$  les coordonnées des deux vecteurs dans la nouvelle base. Alors la condition de colinéarité s'exprime comme suit :

$$\frac{r_1(x)}{s_1(x)} = \frac{r_2(x)}{s_2(x)} = \dots = \frac{r_{n-1}(x)}{s_{n-1}(x)} = 0.$$

Ce qui équivaut à formuler les  $n-2$  équations suivantes

$$r_1(x)s_2(x) - s_1(x)r_2(x) = \dots = r_1(x)s_{n-1}(x) - s_1(x)r_{n-1}(x) = 0.$$

Pour  $i = 1, \dots, n-2$ , on pose  $a_i(x) = r_1(x)s_{i+1}(x) - s_1(x)r_{i+1}(x)$ . Notons que chacun des  $a_i$  est au plus de degré  $3d$ . La condition d'appartenance à la sphère unité s'exprime évidemment par :  $x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0$ . Ainsi lorsque les minima de  $|\nabla f|^2$  sont atteints sur le bord de  $\mathbb{B}^n$ , ils sont contenus dans l'ensemble  $\Gamma_2$  et décrit localement par les équations

$$a_1(x) = \dots = a_{n-2}(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0.$$

Dans le cas générique (d'après la proposition 2.2.3 et le corollaire 2.2.4 en dehors d'un ensemble semi-algébrique  $G_d \subset \mathbb{R}_d[\mathbf{X}]$  de codimension supérieure ou égale à 1), les ensembles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , étant donnés par  $n-1$  équations polynomiales, sont des courbes algébriques, chacune déterminée par  $n-1$  équations polynômiales. Pour  $\Gamma_1$ , chacun des polynômes est de degré inférieur ou égal à  $3d-4$ , alors que  $\Gamma_2$  est déterminée par un polynôme de degré 2 et  $n-2$  polynômes dont le degré est borné par  $3d$ .

Le lieu des minima est donc contenu dans la réunion des courbes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Il suffit donc de déterminer la longueur des courbes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . D'après la formule de Cauchy-Crofton, il suffit donc de déterminer le nombre maximal de points d'intersection des courbes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  avec un hyperplan de  $\mathbb{R}^n$ .

Le théorème de Bezout (cf [Be-Ri]) affirme que si une courbe algébrique contenue dans  $\mathbb{R}^n$  est donnée par  $n-1$  équations polynomiales  $P_1 = \dots = P_{n-1} = 0$ , où les  $P_i$  sont des polynômes de degré  $d_i$ , alors le nombre de points d'intersections avec un hyperplan de  $\mathbb{R}^n$  est majoré par  $d_1 d_2 \dots d_{n-1}$ .

Ce résultat appliqué à la courbe  $\Gamma_1$  donne comme nombre maximal de points d'intersection, l'entier  $N_1(n, d) = (3d-4)^{n-1}$ . De la même façon on obtient pour la courbe  $\Gamma_2$  l'entier  $N_2(n, d) = 2(3d)^{n-2}$ .

Ainsi, le nombre maximal de points d'intersection entre un hyperplan de  $\mathbb{R}^n$  avec la courbe des minima est majoré par :

$$N(n, d) = N_1(n, d) + N_2(n, d) = (3d-4)^{n-1} + 2(3d)^{n-2}.$$

Remarquons que l'ensemble des hyperplans de  $H$  ayant une intersection non vide avec  $\mathbb{B}^n$  est compact, et donc de volume fini,  $V(n)$  disons. Soit  $\Gamma_{min}$  la courbe des minima que l'on vient de construire. La formule de Cauchy-Crofton appliquée à la courbe  $\Gamma_{min}$  donne  $\text{long}(\Gamma_{min}) \leq V(n)N(n, d)$ .

Soit  $\text{long}(\Gamma_{min}) \leq V(n)((3d - 4)^{n-1} + 2(3d)^{n-2})$ .

Notons que si l'on fait cette construction pour chaque polynôme de  $\mathbb{R}_d[\mathbf{X}] \setminus G_d$ , on obtient la section semi-algébrique voulue. Ainsi, pour chaque polynôme de degré inférieur ou égal à  $d$ , on obtient une courbe  $\Gamma_{min}$  dont la longueur est également bornée par  $V(n)N(n, d)$ .

Cette majoration étant indépendante du choix du paramètre, on obtient alors que la longueur des courbes intégrales du champ  $\nabla f$  est inférieure à :

$$A(n, d) = 2V(n)((3d - 4)^{n-1} + 2(3d)^{n-2}).$$

**Remarque 2.2.6.** Cette borne est valable génériquement, c'est-à-dire dans le cas où les ensembles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont effectivement des courbes. Dans le cas contraire dès que l'un de ces ensembles est de dimension plus grande, on doit franchir une étape supplémentaire, et choisir dans  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  des courbes semi-algébriques dont on devra calculer les longueurs. Une autre approche consisterait à choisir une suite de polynômes génériques de degré fixé  $d$  qui converge vers un polynôme non générique de même degré puis d'obtenir la borne pour ce dernier polynôme par passage à la limite.

# Chapitre 3

## Valeurs critiques asymptotiques

On sait que, pour une fonction  $f$  de classe  $C^1$  à valeurs réelles, définie sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , les seules valeurs critiques (notées  $K_0(f)$ ) ne suffisent pas à caractériser les points de bifurcation ; c'est-à-dire les valeurs pour lesquelles la topologie des fibres change (voir en particulier l'exemple 2 de la section 3.3, où toutes les fibres sont connexes exceptée la fibre au dessus de 0, bien que la fonction n'ait pas de valeurs critiques). Il faut donc étudier quel autre type de phénomène peut se produire, et en conséquence, introduire la notion de singularité à l'infini (ou plus généralement celle de singularité au bord de  $\Omega$ ), ainsi que celle d'ensemble de valeurs critiques asymptotiques (noté  $K_\infty(f)$ , cf. Définition 3.1.1 et Théorème 3.2.2). Dans le cas d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^n$ , l'ensemble  $\mathbb{R} \setminus K_\infty(f)$ , est l'ensemble des points qui vérifient la condition de Malgrange. Il est également connu que, lorsque  $f$  est de classe  $C^2$ ,  $f$  est une fibration triviale au dessus de chaque composante connexe de  $\mathbb{R} \setminus (K_0(f) \cup K_\infty(f))$ . En général, l'ensemble  $K_f = K_0(f) \cup K_\infty(f)$  est très grand, et peut être égal à  $\mathbb{R}$ . Le théorème principal de ce chapitre (Théorème 3.1.4) montre que  $K_\infty(f)$  est fini (pour la finitude de  $K_0$  voir [Loi-Za]). La démonstration s'inspire de [Ku2] où un résultat analogue est montré, mais avec une définition de valeurs critiques asymptotiques qui ne permet pas d'utiliser le théorème de Palais (cf. [Pal] et [Rab]) qui est une généralisation du célèbre théorème de fibration d'Ehresmann dans le cas de fonctions non propres. Dans la section 3.2 nous généralisons le résultat principal de la section 3.1 au cas où  $f$  est définie sur un ouvert  $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ . Nous construisons une métrique (définissable) riemannienne  $\delta$  sur  $\Omega$  et nous montrons la finitude des valeurs critiques asymptotiques relativement à  $\delta$  (théorème 3.2.2). Puisque  $(\Omega, \delta)$  est complet,

on peut appliquer le théorème de Palais. A la fin de ce chapitre, nous montrons que pour  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , on a  $S_f \subset K_\infty(f)$ ; où  $S_f$  est un ensemble définissable qui contient déjà les points de bifurcation (cf. [Loi-Za]).

### 3.1 Valeurs critiques asymptotiques

Commençons par définir la notion principale de ce chapitre. On considère une fonction différentiable  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^n$ . Nous allons définir un ensemble de valeurs encore appelées valeurs critiques asymptotiques. On pourra toutefois noter une différence sensible avec le chapitre précédent. Néanmoins, les définitions ne sont pas contradictoires et se rejoignent si on garde à l'esprit qu'il faut étudier quand  $(1 + |x|)|\nabla f(x)| \rightarrow 0$ . Lorsque  $f$  est définie sur un ouvert borné, on retrouve les valeurs critiques asymptotiques du chapitre précédent, dans le cas contraire on pose la définition suivante :

**Définition 3.1.1.** *Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable. On dit que  $c \in \mathbb{R}$  est une valeur critique asymptotique pour la fonction  $f$  s'il existe une suite de points  $\{x_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ , telle que  $|x_\nu| \rightarrow +\infty$ ,  $f(x_\nu) \rightarrow c$  et  $|x_\nu| \cdot |\nabla f(x_\nu)| \rightarrow 0$ . On note alors  $K_\infty(f)$  l'ensemble des valeurs critiques asymptotiques de  $f$ .*

Rappelons que si  $t$  n'est pas une valeur critique, ni une valeur critique asymptotique (au sens de la définition ci-dessus), alors on dit que la condition de Malgrange est vérifiée en  $t$ , et il existe un voisinage  $V$  de  $t$  tel que  $f : f^{-1}(V) \rightarrow V$  est une fibration. Pour les détails voir par exemple [Pal] et [Par]. La section 3.2 énonce également une généralisation de ce résultat. Le résultat principal de cette partie (théorème 3.1.4) montre que pour une fonction définissable  $C^1$ , il n'y a qu'un nombre fini de points où la condition de Malgrange n'est pas vérifiée.

**Remarque 3.1.2.** Dans le cas d'une fonction de classe  $C^1$  qui n'est pas propre, si  $K_0(f)$  désigne l'ensemble des valeurs critiques  $f$ , alors l'ensemble  $K(f) = K_\infty(f) \cup K_0(f)$  n'est pas fermé généralement. Si  $f$  est définissable, alors les ensembles  $K_0(f)$  et  $K_\infty(f)$  sont fermés et définissables dans  $\mathcal{M}_1$  (pour

la définissabilité il suffit d'écrire  $K(f)$  en langage de premier ordre et de procéder à l'élimination des quantificateurs). Ainsi  $K_\infty(f)$  est au plus une réunion finie d'intervalles et de points.

**Lemme 3.1.3.** *Soit  $f$ , une fonction de classe  $C^1$  définissable, alors il existe  $\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  définissable vérifiant  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\rho(r)}{r} = +\infty$  et telle que :  $K_\infty^\rho(f) = K_\infty(f)$ , où  $K_\infty^\rho(f)$  est l'ensemble des réels  $c \in \mathbb{R}$  tels qu'il existe une suite  $\{x_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ , telle que  $|x_\nu| \rightarrow +\infty$ ,  $f(x_\nu) \rightarrow c$  et  $\rho(|x_\nu|) \cdot |\nabla f(x_\nu)| \rightarrow 0$ .*

*Preuve.* Il suffit de prouver l'inclusion  $K_\infty(f) \subset K_\infty^\rho(f)$ . La preuve reprend un argument de [K-O-S] utilisé dans le cadre semi-algébrique. Soit  $k$  un entier positif, on identifie  $\mathbb{R}^k$  avec  $s_k(\mathbb{R}^k) \subset S^k$ , où  $s_k$  désigne l'inverse de la projection stéréographique. Soient  $g$  et  $\phi$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}^n$  par :

$$g(x) = |x| \cdot |\nabla f(x)| \text{ et } \phi(x) = (f(x), g(x)).$$

Soit  $S \subset \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  l'image par l'application  $\delta_n = (s_n, s_1, s_1)$  du graphe de  $\phi$  et  $V$  l'adhérence dans  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  de  $\delta_n(\{\infty\} \times K_\infty(f) \times \{0\})$ . Les ensembles  $V$  et  $S$  sont compacts et définissables, et  $V \subset \overline{S} \setminus S$ . Et d'après le lemme 1.1.7, il existe  $\tilde{A} \subset S$  tel que :

$$\overline{\tilde{A}} \cap (\{\infty\} \times S^1 \times S^1) = V. \quad (3.1)$$

Soient  $A = \delta_n^{-1}(\tilde{A})$  et  $\Gamma = \pi(A)$  où  $\pi$  désigne la projection naturelle sur les  $n$  premières coordonnées. L'égalité (3.1) signifie simplement que le point  $\{\infty\} \times \{y\} \times \{0\} \in \delta_n^{-1}(V)$  si et seulement s'il existe une suite de points  $x_\nu \in \Gamma$  telle que  $|x_\nu| \rightarrow +\infty$ ,  $f(x_\nu) \rightarrow y$  et  $g(x_\nu) \rightarrow 0$ . Notons que la dernière condition est valable grâce à la compactification. Soit  $\theta$ , la fonction définie par  $\theta(r) = \sup_{x \in \Gamma \cap S^n(r)} r |\nabla f(x)|$ . La fonction  $\theta$  est définissable et  $\theta(r) \rightarrow 0$

quand  $r \rightarrow +\infty$ . En posant  $\rho(r) = \left(\frac{\theta(r)}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$  on obtient dans un premier temps  $\sup_{x \in \Gamma \cap S^n(r)} \rho(r) |\nabla f(x)| \rightarrow 0$  puis l'inclusion  $K_\infty(f) \subset K_\infty^\rho(f)$ . ■

**Théorème 3.1.4.** *Soit  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  une fonction définissable de classe  $C^1$ . Alors  $K_\infty(f)$  est une réunion finie de points.*

*Preuve.* Compte tenu de la remarque 3.1.2, on va montrer que  $K_\infty(f)$  ne contient pas d'intervalle. Nous allons donner deux preuves différentes suivant

que la fonction  $f$  est définissable dans une structure o-minimale polynomialement bornée ou non. Dans le premier cas, on s'appuie sur des arguments classiques de géométrie semi-algébrique, alors que dans le cas où la structure o-minimale contient la fonction exponentielle nous avons besoin d'introduire le concept de décomposition L-régulière. L'existence d'une telle décomposition dans le contexte o-minimal est un résultat assez profond. Confronter ces deux démonstrations est révélateur de la différence entre les structures polynomialement bornées (assez proches des ensembles semi-algébriques), et les structures non polynomialement bornées qui contiennent nécessairement la fonction exponentielle (cf [Mi1]).

**Cas polynomialement borné.** Soit  $\rho$  comme dans le lemme précédent. On construit une fonction définissable  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , nulle sur  $K_\infty^\rho(f)$  et strictement positive sur  $\mathbb{R} \setminus K_\infty^\rho(f)$ , en posant :

$$\varphi(t) = \inf\{\rho(|x_\nu|) \cdot |\nabla f(x_\nu)| : x_\nu \in \mathbb{R}^n, |x_\nu| \rightarrow +\infty, \lim_{\nu \rightarrow +\infty} f(x_\nu) = t\}.$$

Soit  $c \in K_\infty^\rho(f)$ , et quitte à remplacer  $f$  par  $f - c$ , on peut supposer que  $0 \in K_\infty^\rho(f)$ . De plus, on peut supposer que  $f^{-1}(t) \neq \emptyset$  pour  $t > 0$  et suffisamment proche de 0. Dans le cas contraire, le théorème est trivial.

L'ensemble  $K_\infty^\rho(f)$  et la fonction  $\varphi$  étant définissables, il suffit de montrer qu'il existe un réel  $\delta > 0$  tel que la fonction  $\varphi$  est strictement positive sur l'intervalle  $]0, \delta[$ . On suppose au contraire :

(\*) il existe  $\varepsilon > 0$ , tel que pour tout réel  $t$ ,  $0 < t < \varepsilon$ , on a  $\varphi(t) = 0$ .

On construit alors un autre ensemble définissable  $\Sigma$ , en posant :

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(|x|) \cdot |\nabla f(x)| < f(x)\}.$$

Notons désormais  $f_\Sigma$  le graphe de la restriction de  $f$  à l'ensemble  $\Sigma$ . Ainsi, si la condition (\*) est vérifiée, il existe une suite  $\{t_\nu\} \in \mathbb{R}$ , telle que,  $\varphi(t_\nu) = 0$ , et  $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} t_\nu = 0$ . Alors, il existe une suite  $t'_\nu \in \mathbb{R}$  vérifiant  $|t'_\nu - t_\nu| < \frac{t_\nu}{2}$  et une suite  $y_\nu \in f^{-1}(t'_\nu) \cap \{x \in \mathbb{R}^n, |x| > \nu\}$ , telles que  $\rho(|y_\nu|) \cdot |\nabla f(y_\nu)| < t'_\nu$ . Comme  $(y_\nu, t'_\nu)$  appartient à l'ensemble  $f_\Sigma$ ,  $|y_\nu| \rightarrow +\infty$  et  $t'_\nu \rightarrow 0$  quand  $\nu \rightarrow +\infty$ , il existe (d'après le lemme 1.1.5) un arc définissable  $\tilde{\gamma}$  de classe  $C^1$ , contenu dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ , tel que pour le paramétrage  $|\gamma(r)| = r$  on a :

$$\forall r > R, \tilde{\gamma}(r) = (\gamma(r), f \circ \gamma(r)) \text{ et } \tilde{\gamma}(]R, +\infty[) \subset f_\Sigma$$

pour un  $R$  suffisamment grand. De plus  $\gamma$  vérifie les conditions suivantes :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} |\gamma(r)| = +\infty \text{ et } \lim_{r \rightarrow +\infty} f \circ \gamma(r) = 0.$$



Maintenant, si  $r \in ]R, +\infty[$ , on pose  $h(r) = f \circ \gamma(r)$ , et on a :  $\lim_{r \rightarrow +\infty} h(r) = 0$ . Ensuite, comme  $|h'(r)| = |\langle \nabla f(\gamma(r)), \gamma'(r) \rangle| \leq |\nabla f(\gamma(r))| \cdot |\gamma'(r)|$  et  $\gamma(r) \in \Sigma$ , on obtient grace à 1.1.6 :

$$0 < |h'(r)| \leq \frac{h(r)}{\rho(r)} \cdot |\gamma'(r)| \leq C \frac{h(r)}{\rho(r)}. \quad (3.2)$$

Si la structure est polynomialement bornée, alors il existe un unique couple de réels  $\alpha, K > 0$  tel que  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\rho(r)}{r^{1+\alpha}} = K$  (cf [Mi1]). La fonction  $\frac{1}{\rho}$  est donc intégrable. Soit  $r_0 > R$ , tel que pour tout  $r > r_0$ , l'inégalité précédente est vérifiée. Posons pour  $r > r_0$ ,  $u(r) = 2h(r_0) - h(r)$ . On obtient ainsi  $\lim_{r \rightarrow +\infty} u(r) = 2h(r_0)$ . Et l'inégalité (3.2) implique :

$$0 < u'(r) \leq C \frac{u(r)}{\rho(r)}. \quad (3.3)$$

Ainsi en intégrant membre à membre l'inégalité (3.3) pour  $s \in [r_0, r]$  et en utilisant le lemme de Gronwall, on obtient, pour des constantes  $K_1 > 0$  dépendant de  $K$  et de  $C$ , et  $K_2 > K_1$  :

$$u(r) \leq h(r_0) \exp \int_{r_0}^{+\infty} \frac{K_1}{\rho(s)} ds \leq h(r_0) \exp\left(\frac{K_2}{r_0^\alpha}\right) < \frac{3}{2}h(r_0),$$

quitte à choisir  $r_0$  suffisamment grand pour que  $\frac{K_2}{r_0^\alpha} < \log \frac{3}{2}$ . La fonction  $u$  est donc majorée par un réel strictement plus petit que  $2h(r_0)$ . Ce qui est en contradiction avec  $\lim_{r \rightarrow +\infty} u(r) = 2h(r_0)$ , et achève la démonstration. ■

Maintenant, si la structure n'est pas polynomialement bornée, il se peut que la fonction  $\rho$  soit de la forme  $\rho(r) = r \log r$ . Il est alors impossible d'utiliser un argument tel que le lemme de Gronwall. L'idée pour résoudre le problème est de définir sur des sphères d'un rayon assez grand, une famille d'ensembles dont l'intersection des images par la fonction  $f$  contient  $K_\infty(f)$ . Cette construction se fait par décomposition L-régulière d'une famille d'ensembles définissables que nous rappelons brièvement dans le paragraphe suivant.

**Cas général.** Soit  $\Theta \subset \mathbb{R}^n$  l'ensemble définissable défini par  $\Theta = \{x \in \mathbb{R}^n : |\nabla f(x)| < \frac{1}{\rho(|x|)}\}$ . On définit ensuite  $\Theta_r = \Theta \cap S(r)$ , d'après [Ku1] (ou [Ku-Pa] pour la version o-minimale), il existe une partition finie  $\{L^i\}_{i \in I}$  (décomposition L-régulière) de  $\Theta = \bigcup_{r>0} \Theta_r$  telle que chaque  $L^i$  est définissable et  $L^i(r) = L^i \cap S(r)$  a la propriété de Whitney avec constante  $M = M(n)$  et exposant 1.

Cela signifie que la distance géodésique entre deux points  $x$  et  $y$  de  $L^i(r)$  est inférieure à  $M|x - y| \leq 2Mr$ .

Soit  $c$  une valeur critique asymptotique de la fonction  $f$ . On va encore montrer qu'il n'y a pas d'intervalle ouvert contenant  $c$  et constitué uniquement de valeurs critiques asymptotiques. Remarquons d'abord que si  $c \in K_\infty(f)$ , alors  $c \in \lim_{R \rightarrow +\infty} \overline{\bigcup_{r>R} f(\Theta_r)}$ . Par ailleurs, les  $L^i$  étant en nombre fini, on déduit que  $c \in \lim_{R \rightarrow +\infty} \overline{\bigcup_{r>R} f(L(r))}$  où  $L$  est l'un des  $L^i$  de la décomposition. Soit  $\gamma$  une géodésique contenue dans  $L(r)$ . Alors,

$$\text{long}(f \circ \gamma) = \int_{s_1}^{s_2} |(f \circ \gamma)'(s)| ds \leq \int_{s_1}^{s_2} |\gamma'(s)| \cdot |\nabla f(\gamma(s))| ds \leq \frac{1}{\rho(r)} \text{long}(\gamma)$$

Soit  $\text{long}(f \circ \gamma) \leq \frac{2Mr}{\rho(r)}$ , où par abus de notation,  $\text{long}$  désigne aussi bien la longueur d'un arc que celle d'un intervalle. Ainsi,  $\text{long}[f(L(r))] \leq \frac{2Mr}{\rho(r)} \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow +\infty$ . Soit  $[a(r), b(r)]$  l'intervalle  $\overline{f(L(r))}$ , notons que les fonctions  $a$  et  $b$  sont définissables et par conséquent ont une limite commune (on désigne par  $\alpha$  cette limite) en  $+\infty$ , car  $\lim_{r \rightarrow +\infty} (a(r) - b(r)) = 0$ . Rappelons que pour  $r$  assez grand,  $a$  et  $b$  sont monotones. Soit

$$I(R) = \overline{\bigcup_{r>R} [a(r), b(r)]}.$$

Alors, en fonction de la monotonie de  $r \mapsto a(r)$  et de  $r \mapsto b(r)$ , l'intervalle  $I(R)$  se présente sous l'une des formes suivantes :  $I(R) = [a(R), b(R)]$  ou  $I(R) = [a(R), \alpha]$  ou  $I(R) = [\alpha, b(R)]$ . Dans tous les cas  $\lim_{R \rightarrow +\infty} I(R) = \{\alpha\}$ . Comme  $c \in \lim_{R \rightarrow +\infty} I(R)$ , on obtient  $c = \alpha$ . Ainsi à chaque  $L^i$  correspond au plus une valeur critique asymptotique. D'où  $K_\infty(f)$  n'a qu'un nombre fini de points. ■

**Remarque 3.1.5.** Le théorème 3.1.4 reste vrai pour une fonction définissable, de classe  $C^1$  sur une sous-variété définissable  $V$  plongée dans  $\mathbb{R}^n$ . La sous variété  $V$  est munie de la métrique riemannienne complète induite par la métrique Euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ . Cette remarque est capitale pour la démonstration du théorème 3.2.2, car on se ramène à cette situation.

## 3.2 Valeurs critiques asymptotiques généralisées

On considère un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , on va montrer qu'il existe une métrique riemannienne qui rend  $\Omega$  complet et telle que les valeurs critiques asymptotiques généralisées de toute fonction  $f$  de classe  $C^2$  forment un ensemble fini. Pour cela on va se ramener au cas de la du théorème 3.1.4 pour une fonction définie sur une sous-variété de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . L'idée est d'utiliser une fonction tapisante  $g$  de classe  $C^2$ , et d'étudier les valeurs critiques asymptotiques d'une fonction  $\tilde{f}$ , difféomorphe à la fonction  $f$  et définie sur le graphe de la restriction de la fonction  $\frac{1}{g}$  à l'ensemble  $\Omega$ . Rappelons un théorème de Palais (cf [Pal] et [Rab]) qui s'exprime de la façon suivante : soient  $(\Omega, \delta)$  une variété riemannienne complète et  $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$ , alors il existe un ensemble  $\mathcal{K}_f \subset \mathbb{R}$  tel que  $f : \Omega \setminus f^{-1}(\mathcal{K}_f) \mapsto \mathbb{R} \setminus \mathcal{K}_f$  est une fibration triviale au dessus de chaque composante connexe de  $\mathbb{R} \setminus \mathcal{K}_f$ .

La proposition suivant assure l'existence de fonctions tapisantes pour les structures o-minimales :

**Proposition 3.2.1 (van den Dries-Miller).** *Soit  $\Omega$  un ouvert définissable de  $\mathbb{R}^n$ . Alors, il existe une fonction  $g$  définissable, de classe  $C^2$ , strictement positive sur  $\Omega$  et nulle sur  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ .*

Voir [vD] pour l'existence d'une fonction de classe  $C^k$ , où  $k$  est un entier arbitraire.

**Théorème 3.2.2.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert définissable. Alors il existe une métrique Riemannienne  $\delta$  sur  $\Omega$  telle que  $(\Omega, \delta)$  est complet, et quelle que soit  $f$  définissable, de classe  $C^2$  sur  $\Omega$ , l'ensemble  $\mathcal{K}_f = \{c \in \mathbb{R} : \exists \{x_p\}_{p \in \mathbb{N}} \subset \Omega, \lim_{p \rightarrow +\infty} f(x_p) = c, \lim_{p \rightarrow +\infty} |\nabla_\delta f(x_p)| = 0\}$  ne contient qu'un nombre fini de points.*

**Notations 3.2.3.** Ici  $\nabla_\delta$  désigne le gradient associé à la métrique Riemannienne  $\delta$ , et  $\mathcal{K}_f = K_0(f) \cup K_\infty(f)$  où  $K_0(f)$  désigne l'ensemble des valeurs critiques de la fonction  $f$  et  $K_\infty(f)$  l'ensemble  $\{c \in \mathcal{K}_f : \text{aucune sous-suite } \{x_p\}_{p \in \mathbb{N}} \text{ ne converge dans } \Omega\}$ .

*Preuve du théorème 3.2.2.* Notons que  $K_0(f)$  est un ensemble fini. Il suffit seulement d'étudier l'ensemble  $K_\infty(f)$ . Soit  $g$  une fonction définissable, vérifiant les propriétés de la proposition 3.2.1 pour l'ouvert  $\Omega$ , et soit  $g_\Omega$ , le graphe

de la restriction à l'ensemble  $\Omega$  de la fonction  $\frac{1}{g}$ . Alors  $g_\Omega$  est un ensemble définissable dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  et difféomorphe à  $\Omega$ . À chaque fonction  $f$  vérifiant les hypothèses du théorème 3.2.2, on associe une fonction  $\tilde{f}$  sur  $g_\Omega$ , telle que pour  $(x, \frac{1}{g(x)}) \in g_\Omega$ ,  $\tilde{f}(x, \frac{1}{g(x)}) = f(x)$ .  
Soit  $\mu$  une métrique sur  $g_\Omega$ , pour laquelle le gradient associé  $\nabla_\mu$  est tel que :

$$|\nabla_\mu \tilde{f}(y)| = (1 + |y|)|\nabla \tilde{f}(y)|$$

où  $y \in g_\Omega$  et  $\nabla$  désigne la restriction sur  $g_\Omega$  du gradient associé à la métrique euclidienne. Notons que l'ensemble  $g_\Omega$  étant localement une sous-variété de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , il est complet pour la métrique  $\mu$ . En vertu de la remarque 3.1.5 et du théorème 3.1.4,  $K_\infty(\tilde{f})$  est réunion finie de points de  $\mathbb{R}$ . Or l'application  $\mathcal{G} = (Id, \frac{1}{g}) : \Omega \longrightarrow g_\Omega$  étant un difféomorphisme, elle induit une isométrie entre  $(\Omega, \delta)$  et  $(g_\Omega, \mu)$ , où  $\delta(u, v) = \mu(\mathcal{G}^*(u), \mathcal{G}^*(v))$  pour tous  $u, v \in T\Omega$ . Evidemment  $(\Omega, \delta)$  est complet et  $K_\infty(\tilde{f}) \cup K_0(\tilde{f}) = \mathcal{K}_f$ . Comme  $K(\tilde{f})$  et  $K_\infty(\tilde{f})$  sont des ensembles finis de points, alors  $\mathcal{K}(f)$  l'est également. Ce qui termine la démonstration. ■

### 3.3 Exemples et Remarques

Soit  $f$  une fonction définissable, de classe  $C^1$ , définie sur  $\mathbb{R}^n$ . Dans [Loi-Za], Loi et Zaharia prennent comme définition de valeurs critiques asymptotiques pour la fonction  $f$ , l'ensemble  $S_f$  défini comme l'ensemble des réels  $c$  tels qu'il existe une suite  $(x_\nu, \lambda_\nu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  qui vérifie les conditions suivantes :  $f(x_\nu) \rightarrow c$  et  $\nabla f(x_\nu) = \lambda_\nu x_\nu$  quand  $\nu \rightarrow +\infty$ . Notons que  $\lambda_\nu$  est non nul à partir d'un certain rang.

**Proposition 3.3.1.** *Soit  $f$  comme ci-dessus, alors  $S_f \subseteq K_\infty(f)$ .*

*Preuve .* Soit  $c \in S_f$ , alors il existe une suite  $\{x_\nu, \lambda_\nu\} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  vérifiant les conditions de la définition, et comme dans tout ce qui précède, il existe  $R > 0$  ainsi qu'une fonction  $\lambda$  et un arc  $\gamma$ , tous deux définissables  $C^1$  et définis sur  $]R, +\infty[$ , tels que  $\lim_{r \rightarrow +\infty} f(\gamma(r)) = c$ ,  $\lim_{r \rightarrow +\infty} |\gamma(r)| = +\infty$  et  $\forall r \in ]R, +\infty[$ ,  $\nabla f(\gamma(r)) = \lambda(r)\gamma(r)$ .

Comme précédemment, on pose  $h = f \circ \gamma$  et  $\alpha(r) = \cos(\gamma(r), \gamma'(r))$ . Il est facile de voir que  $\lambda(r) = \frac{h'(r)}{|\gamma(r)| \cdot |\gamma'(r)| \cdot \alpha(r)}$ . Et si on reparamètre  $\gamma$  pour que  $|\gamma(r)| = r$ ,

alors on a :

$$|\gamma(r)| \cdot |\nabla f(\gamma(r))| = \frac{1}{|\gamma'(r)|\alpha(r)} rh'(r).$$

De plus, on a  $|\gamma'(r)|\alpha(r) \rightarrow 1$ , et  $rh'(r) \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow +\infty$ . Ainsi,  $c \in K_\infty(f)$ .  
Ce qui termine la preuve. ■

**Exemples et Remarques 3.3.2.** Il convient de remarquer que  $S_f$  contient encore des points superflus, et ne distingue pas totalement les valeurs de bifurcations de la fonction  $f$ . Bien que  $S_f$  est plus fin que  $K_\infty(f)$ , il ne semble pas être davantage exploitable pour caractériser plus précisément l'ensemble des bifurcations de fonctions définissables.

Dans les exemples qui suivent, on donne différentes configurations pour  $S_f$ ,  $K_\infty(f)$  et  $B_f$  ( $B_f$  désigne les points de bifurcation ou valeurs atypiques). On s'est restreint à regarder des fonctions définies sur  $\mathbb{R}^2$ .

1.  $f(x, y) = \frac{y}{1+x^2}$ . Alors  $S_f = B_f = \emptyset$  et  $\{0\} = K_\infty(f)$ .
2.  $f(x, y) = y(xy - 1)$ . Alors  $S_f = B_f = K_\infty(f) = \{0\}$ .
3.  $f(x, y) = y \exp 2x + \exp x$  (cf. [Loi-Za]). Alors  $B_f = \emptyset$  et  $S_f = K_\infty(f) = \{0\}$ .



# Chapitre 4

## Courbes intégrales au voisinage d'une fibre atypique

Dans ce chapitre on étudie le comportement des trajectoires du champ de gradient d'une fonction définissable  $f$  au voisinage de ses valeurs critiques asymptotiques. On établit d'abord une inégalité du type Łojasiewicz à l'infini. On montre ensuite qu'en tout point situé sur un niveau critique à l'infini  $c$  (qui n'est pas un niveau critique) passe une trajectoire du champ de gradient. Une telle trajectoire provient de n'importe quel niveau typique  $t$  en temps fini (pourvu que l'intervalle  $[t, c[$  ne contienne ni valeur critique, ni valeur critique asymptotique). Enfin, on donne une description plus précise, dans le cas de la dimension deux, de l'ensemble  $I(t)$  des points situés sur un niveau typique par lesquels passe une courbe intégrale de longueur infinie et sur laquelle la fonction reste bornée. On établit ainsi une relation entre le nombre de composantes connexes d'une fibre typique et d'une fibre atypique au moyen entre autre de la caractéristique d'Euler de la fibre typique et de l'ensemble  $I(t)$ .

### 4.1 Inégalité de Łojasiewicz

On a vu qu'au voisinage d'une valeur critique asymptotique d'une fonction définissable  $f$ , il existe un chemin définissable sur lequel la condition de Malgrange est mise en défaut. Néanmoins, il est possible de relever le champ de gradient par une fonction définissable. Dans certains cas (cf 4.1.2), cela permet de décider si on peut fibrer le graphe de  $f$  par ses niveaux au voisinage d'une valeur critique asymptotique. Dans le cas où la structure o-minimale est

polynomialement bornée on donne une condition nécessaire de fibration.

**Théorème 4.1.1 (Inégalité de Łojasiewicz).** *Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définissable positive de classe  $C^1$ . Supposons que  $0 \in K_\infty(f)$ . Alors, il existe des réels  $C, R, \varrho > 0$ , et une fonction définissable  $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  de classe  $C^1$  sur  $]0, \varrho[$ , strictement décroissante et positive, tels que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $|x| > R$  et  $f(x) \in ]0, \varrho[$ , on a :  $|\nabla(\psi \circ f)(x)| \geq \frac{C}{|x|}$ .*

*Preuve.* Posons,  $\varphi(t) = \inf\{|x_\nu| \cdot |\nabla f(x_\nu)| : |x_\nu| \rightarrow +\infty, \lim_{\nu \rightarrow +\infty} f(x_\nu) = t\}$ .

Pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, l'ensemble  $f^{-1}(t)$  est non vide pour tout  $t \in ]0, \varepsilon[$ .

Soit  $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(0) : f(x) < \varepsilon, |x| \cdot |\nabla f(x)| \leq 2\varphi(f(x))\}$ .

Notons que pour tout  $t \in ]0, \varepsilon[$  on a :  $\Delta \cap f^{-1}(t) \neq \emptyset$ . Ainsi, en reprenant le même type d'arguments que dans la preuve de la finitude de  $K_\infty(f)$ , il existe un arc  $\gamma : [R, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  définissable de classe  $C^1$  tel que pour tout  $r > R$  :  $\gamma(r) \in \Delta$ ,  $|\gamma(r)| = r$ , on a  $(f \circ \gamma)(r) \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow +\infty$ .

Soit  $h$  la fonction définissable définie par  $h(r) = (f \circ \gamma)(r)$ . Alors  $h(r) \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow +\infty$ . De plus  $h(r) > 0$  pour tout  $r > R$ . D'après le théorème de monotonie, il existe  $R_0 > R$  tel que la fonction  $h$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $]R_0, +\infty[$ . C'est à dire que  $h$  réalise un difféomorphisme de l'intervalle  $]R_0, +\infty[$  sur un intervalle  $]0, \varrho[$ , où  $\varrho = h(R_0)$ . On pose alors  $\psi(t) = h^{-1}(t)$ , pour  $t \in ]0, \varrho[$ .

Maintenant, soit  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $f(x) = t \in ]0, \varrho[$ . Alors, pour tout  $r > R_0$  on a  $|\gamma(r)| = r = h^{-1}(t) = \psi(t)$ . On obtient ainsi l'égalité :

$$|x| \cdot |\nabla(\psi \circ f)(x)| = |\psi'(t)| \cdot |x| \cdot |\nabla f(x)|.$$

Or les points  $x$  et  $\gamma(r)$  appartiennent à  $f^{-1}(t)$ . Ainsi, par définition de  $\varphi$  on obtient une première inégalité :  $|x| \cdot |\nabla f(x)| \geq \varphi[f(\gamma(r))]$ . (1)

Comme  $\gamma(r)$  appartient à  $\Delta$ , la fonction  $\varphi[f \circ \gamma]$  satisfait une seconde inégalité :  $\varphi[f(\gamma(r))] \geq \frac{1}{2}|\gamma(r)| \cdot |\nabla f(\gamma(r))|$ . (2)

En regroupant les inégalités (1) et (2) on obtient dans un premier temps :

$$|x| \cdot |\nabla(\psi \circ f)(x)| \geq \frac{1}{2}|\psi'(t)| \cdot |\nabla f(\gamma(r))| \cdot |\gamma'(r)|.$$

Ensuite, comme  $h'(r) = (f \circ \gamma)'(r) = \langle \nabla f(\gamma(r)), \gamma'(r) \rangle$ , on a la majoration suivante  $|h'(r)| \leq |\nabla f(\gamma(r))| \cdot |\gamma'(r)|$ . Puisque  $\psi'(t) \cdot h'(r) = 1$ , et  $\psi = h^{-1}$  on obtient finalement l'inégalité suivante :

$$|x| \cdot |\nabla(\psi \circ f)(x)| \geq \frac{|\psi'(t) \cdot h'(r)| \cdot |\gamma(r)|}{2|\gamma'(r)|} = \frac{|\gamma(r)|}{2|\gamma'(r)|}.$$



De plus, lorsqu'on paramètre un arc définissable par le distance à l'origine, on obtient (cf conséquence 1.1.6) un majorant ( $A > 1$ ) pour  $|\gamma'(r)|$ . On obtient ainsi l'inégalité :  $|x| \cdot |\nabla(\psi \circ f)(x)| \geq \frac{r}{2A} \geq \frac{R_0}{2A}$ . Ce qui donne pour  $C = \frac{R_0}{2A}$  l'inégalité voulue, soit :  $|\nabla(\psi \circ f)(x)| \geq \frac{C}{|x|}$ . ■

**Remarque 4.1.2.** Dans la démonstration précédente, la fonction  $\psi$  est obtenue comme l'image réciproque de la composée de  $f$  avec un chemin définissable de longueur infinie. Il n'est pas possible d'obtenir de cette façon une fonction  $\psi$  bornée au voisinage de l'origine. Toutefois, si  $f$  et  $\psi$  satisfont aux conditions du théorème précédent, avec  $\psi$  bornée au voisinage de 0, alors 0 n'est pas un point de bifurcation. En effet, la condition de Malgrange est satisfaite en  $\psi(0)$  pour la fonction  $\psi \circ f$  et le champ de gradient  $\nabla(\psi \circ f)$  réalise la fibration. Or, les images des courbes intégrales du champ  $\nabla f$  étant les mêmes que celles du champ  $\nabla(\psi \circ f)$ , on en déduit que  $f$  est une fibration localement triviale en 0 et par conséquent que 0 n'est pas un point de bifurcation du graphe de  $f$ .

Néanmoins, la réciproque n'est pas toujours vraie, comme l'illustre l'exemple suivant (cf [Ti-Za]). Dans la catégorie des ensembles semi-algébriques, on considère le polynôme  $P$  donné par  $P(x, y) = 2x^2y^3 - 9xy^2 + 12y$ . On remarque alors que 0 est une valeur critique asymptotique de  $P$ . En effet,

$$P'_x = y^2(4xy - 9) \text{ et } P'_y = 6(xy - 1)(xy - 2).$$

Alors  $P(\frac{1}{y}, y) = y$ ,  $P'_x(\frac{1}{y}, y) = -5y^2$  et  $P'_y(\frac{1}{y}, y) = 0$ . Ce qui donne :

$$\left| \frac{1}{y^2} + y^2 \right|^{\frac{1}{2}} \left( P'_x\left(\frac{1}{y}, y\right) + P'_y\left(\frac{1}{y}, y\right) \right)^{\frac{1}{2}} = 5y + o(y^3) \rightarrow 0 \text{ quand } y \rightarrow 0.$$

Ainsi, la condition de Malgrange n'est pas vérifiée sur la courbe  $\{xy = 1, x > 0\}$ . Mais, toujours d'après [Ti-Za], 0 n'est pas un point de bifurcation. Par ailleurs, en évaluant la norme du gradient de  $P$  sur les hyperboles  $\{xy = a, a > 0\}$ , on obtient  $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} |\nabla P(x, y)| \geq C_\alpha t^{1+\alpha}$ , où  $t = P(x, y)$ ,  $C_\alpha > 0$ . Mais  $\alpha$  est nécessairement positif. Ce qui produit une fonction  $\psi$  de l'ordre de  $t^{-\alpha}$ , et donc non bornée.

Toutefois, si la structure o-minimale  $\mathcal{M}$  est polynomialement bornée, on a le resultat suivant :

**Proposition 4.1.3.** *Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction définissable dans  $\mathcal{M}$ , vérifiant les hypothèses du théorème 4.1.1, et soit  $\varphi$  la fonction définie comme dans la preuve du théorème 4.1.1. Alors, il existe  $C, \alpha > 0$  tels que pour  $t$  voisin*

de 0, on a :  $\varphi(t) \sim Ct^\alpha$ . De plus, si  $\alpha > 1$ , alors  $0 \in B_f$ , et si  $0 < \alpha < 1$ , 0 n'est pas un point de bifurcation de  $f$ .

*Preuve.* L'existence d'un réel strictement positif  $\alpha$ , vient du théorème de dichotomie ([Mi]), puisque la fonction exponentielle n'est pas définissable dans  $\mathcal{M}$ . Notons que la fonction  $t \rightarrow t^\alpha$  est définissable dans  $\mathcal{M}$ . Ensuite, les seules fonctions convenables pour l'inégalité doivent vérifier :  $|\psi'(t)| \geq \frac{1}{t^\alpha}$ . Comme  $\alpha \neq 1$ , les plus "petites" fonctions  $\psi$  vérifiant l'inégalité sont de la forme  $K - t^{1-\alpha}$ . Ainsi, pour  $0 < \alpha < 1$ , on obtient une fonction définissable bornée au voisinage de 0 alors que, pour  $\alpha > 1$ , la fonction  $\psi$  est nécessairement non bornée. Compte tenu de la remarque précédente, la valeur 0 n'est pas un point de bifurcation si  $0 < \alpha < 1$ , alors qu'elle l'est pour  $\alpha > 1$ . ■

## 4.2 Courbes intégrales au voisinage d'un niveau atypique

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définissable de classe  $C^2$ . On suppose que la fonction  $f$  contient au moins une valeur critique asymptotique (0 pour fixer les idées) qui n'est pas une valeur critique. Soit  $t < 0$  une valeur prise par  $f$  telle que l'intervalle  $[t, 0[$  ne contient ni valeur critique ni valeur critique asymptotique. Le but de cette section est de montrer que par chaque point du niveau  $f^{-1}(0)$  passe une trajectoire du champ de gradient dont la condition initiale est prise sur un niveau arbitraire  $f^{-1}(s)$ , pour  $s \in [t, 0[$ . Plus précisément, on montre que chaque composante connexe du niveau 0 se plonge dans une composante connexe de n'importe quel niveau  $f^{-1}(s)$  si  $s \in [t, 0[$ .

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  deux valeurs de  $f$  telles que  $a < b$  et, pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $f^{-1}(t)$  est non vide. Supposons de plus que  $[a, b] \cap \{K_0(f) \cup K_\infty(f)\} = \emptyset$ . Soient  $t_0 \in ]a, b[$  et  $x_0 \in f^{-1}(t_0)$ . Dans toute la suite, si  $x \in \mathbb{R}^n$ , on notera  $\gamma_x$  la courbe intégrale du champ de gradient passant par le point  $x$ .

**Proposition 4.2.1.** *Soient  $f, a, b, t_0, x_0$  comme ci-dessus. Et soit  $\gamma_{x_0}$  la courbe intégrale maximale dans  $f^{-1}([a, b])$  du champ  $\nabla f$  passant par  $x_0$ . Alors il existe  $r_0, R_0, C > 0$  tels que  $\gamma_{x_0}$  est contenue dans une boule de centre 0 et de rayon  $R_0 = R_0(|x_0|, a, b, C)$ , avec  $C = \inf\{|x| \cdot |\nabla f(x)| : |x| \geq r_0, f(x) \in [a, b]\}$ .*

*Preuve.* Par hypothèses, l'intervalle  $[a, b]$  ne contient ni valeur critique,

ni valeur critique asymptotique. Il existe donc des réels  $r_0$  et  $C$  strictement positifs tels que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0, r_0)$ , et  $f(x) \in [a, b]$ , on a  $|x| \cdot |\nabla f(x)| \geq C$ . Ainsi, on s'intéressera uniquement aux parties de la courbe intégrale situées en dehors de  $B(0, r_0)$ . On peut supposer que  $\gamma_{x_0}$  est entièrement contenue dans  $\mathbb{R}^n \setminus B(0, r_0)$ . Dans le cas contraire, il suffit de se restreindre aux sous-ensembles connexes maximaux de  $\gamma_{x_0}$  contenus dans le complémentaire de  $B(0, r_0)$  puis, d'obtenir une majoration uniforme. Notons que les champs  $\nabla f$  et  $\frac{\nabla f}{|\nabla f|^2}$  étant colinéaires, ils ont les mêmes courbes intégrales. On regarde désormais  $\gamma_{x_0}$  comme une courbe du champ  $\frac{\nabla f}{|\nabla f|^2}$ , ce qui revient à paramétrer la courbe intégrale  $\gamma_{x_0}$  par les niveaux de  $f$ . C'est à dire que  $(f \circ \gamma_{x_0})(t) = t$ , ou encore  $\gamma_{x_0}(t) \in f^{-1}(t)$ . En intégrant le champ entre les niveaux  $t_0$  et  $t$ , où  $t > t_0$ , on obtient :

$$\gamma_{x_0}(t) - \gamma_{x_0}(t_0) = \int_{t_0}^t \frac{\nabla f}{|\nabla f|^2}(\gamma_{x_0}(s)) ds,$$

$$\text{d'où, } |\gamma_{x_0}(t)| \leq |\gamma_{x_0}(t_0)| + \int_{t_0}^t \frac{1}{|\nabla f|}(\gamma_{x_0}(s)) ds \leq |\gamma_{x_0}(t_0)| + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t |\gamma_{x_0}(s)| ds.$$

Le lemme de Gronwall appliqué à la fonction  $t \mapsto |\gamma_{x_0}(t)|$ , implique que pour tout  $t > t_0$ , on a :

$$|\gamma_{x_0}(t)| \leq |\gamma_{x_0}(t_0)| \exp \frac{t - t_0}{C} \leq |\gamma_{x_0}(t_0)| \exp \frac{b - t_0}{C}.$$

Le même calcul reproduit pour  $t \in ]a, t_0[$  donne une majoration similaire. Ainsi, pour tout  $t \in ]a, b[$ , donne  $|\gamma_{x_0}(t)| \leq \max\{|x_0| \exp \frac{b - t_0}{C}, |x_0| \exp \frac{t_0 - a}{C}\}$ .

La courbe intégrale est donc entièrement contenue dans une boule dont le rayon  $R_0$  dépend uniquement de  $|x_0|, a, b$  et  $C$ . Dans le cas où la courbe intégrale recoupe une infinité de fois la boule de rayon  $r_0$ , il suffit de prendre  $r' > r_0$ , tel que chaque composante connexe de  $\gamma_{x_0} \cap \{|x| \geq r_0\}$  coupe la sphère de rayon  $r'$ . On applique ensuite la majoration précédente à chacune ces composantes connexes. ■

**Théorème 4.2.2 (Théorème de plongement).** *Soient  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définissable de classe  $C^2$ ,  $\{0\} \in K_\infty(f) \setminus K_0(f)$  et  $t$  une valeur régulière de la fonction  $f$ , tels que  $[t, 0[ \cap (K_0(f) \cup K_\infty(f)) = \emptyset$ . Alors, il existe une immersion injective ouverte  $\Phi : f^{-1}(0) \rightarrow f^{-1}(t)$ . Plus précisément, le champ de gradient plonge chaque composante connexe de  $f^{-1}(0)$  dans une composante connexe de  $f^{-1}(t)$ .*

*Preuve.* Comme  $q_0$  n'est pas une valeur critique, le champ de gradient est partout non nul en chaque point du niveau  $\{f = 0\}$ . De plus,  $f$  étant de classe  $C^2$ , le champ de gradient est  $C^1$ . Ainsi, lorsqu'on fixe arbitrairement un point  $x_0$  sur le niveau  $\{f = 0\}$ , il existe un voisinage  $V(x_0)$  de  $x_0$ , dans lequel le gradient reste non nul.

Il existe donc une courbe intégrale de  $\nabla f$  traversant le niveau  $\{f = 0\}$  en  $x_0$ . Notons  $\gamma_{x_0}$  la courbe intégrale passant par  $x_0$ . Ainsi, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, la courbe traverse le niveau  $\{f = \varepsilon\}$ . On peut donner une majoration de la longueur de la courbe intégrale passant par  $x_0$  et  $x_\varepsilon$  ( $x_\varepsilon$  étant le point de la courbe intégrale situé sur un niveau  $\{f = \varepsilon\}$  voisin du niveau  $\{f = 0\}$ ).

À partir de maintenant, on paramètre la courbe  $\gamma_{x_0}$  par sa longueur d'arc (i.e. pour chaque valeur  $s$  du paramètre,  $|\gamma'_{x_0}(s)| = 1$ ). On fixe un niveau  $\{f = t\}$ , avec  $t < 0$ . On va montrer qu'il existe une suite strictement décroissante  $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de réels, avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = t$ , telle que  $\gamma_{x_0}$  traverse tous les niveaux  $\{f = \varepsilon_n\}$ , ainsi que le niveau  $\{f = t\}$ .

D'après ce qui précède, pour un  $x_0 \in \{f = 0\}$  fixé, il existe un voisinage  $V(x_0)$  de  $x_0$  dans  $\mathbb{R}^n$  dans lequel l'équation différentielle  $x' = -\nabla f(x)$  admet une solution passant par  $x_0$  et traversant tous les niveaux voisins  $\{f = \varepsilon\}$  qui ont une intersection non vide avec  $V(x_0)$ . Soit  $\varepsilon_1$  ( $\varepsilon_1 \neq 0$ ), l'un de ces niveaux. Notons  $x_1$  le point d'intersection de la courbe intégrale  $\gamma_{x_0}$  avec le niveau  $\{f = \varepsilon_1\}$  et  $s_1$  la longueur d'arc de  $\gamma_{x_0}$  entre les points  $x_0$  et  $x_1$ . Puisque  $f \circ \gamma_{x_0}$  est de classe  $C^1$  et  $\delta_1 \in ]0, s_1[$ , on obtient  $|\varepsilon_1 - 0| = |f(x_1) - f(x_0)| = |f \circ \gamma_{x_0}(s_1) - f \circ \gamma_{x_0}(0)| = |(f \circ \gamma_{x_0})'(\delta_1)| \cdot |s_1 - 0|$ .

D'autre part, comme  $\gamma_{x_0}(\delta_1)$  est colinéaire à  $\nabla f[\gamma_{x_0}(\delta_1)]$  et  $|\gamma'_{x_0}(\delta_1)| = 1$ , on a l'égalité suivante :  $|(f \circ \gamma_{x_0})'(\delta_1)| = |\langle \nabla f[\gamma_{x_0}(\delta_1)], \gamma'_{x_0}(\delta_1) \rangle| = |\nabla f[\gamma_{x_0}(\delta_1)]|$ . Ainsi, la longueur d'arc  $s_1$  s'exprime de la manière suivante :

$$|\varepsilon_1 - 0| = |\nabla f[\gamma_{x_0}(\delta_1)]| \cdot |s_1 - 0|.$$

On utilise ensuite l'inégalité (cf proposition 4.1.1) et on obtient :

$$l_{0, \varepsilon_1}(\gamma_{x_0}) = |s_1 - 0| \leq \frac{|\psi'[f(\gamma_{x_0}(\delta_1))]| \cdot |\gamma_{x_0}(\delta_1)|}{C} \cdot |\varepsilon_1 - 0|.$$

Remarquons que la fonction  $\psi$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]\varepsilon_1, 0[$ . Notons  $\varepsilon'_1 = f[\gamma_{x_0}(\delta_1)]$ . On recommence le même raisonnement en  $x_1$  et on trouve alors un voisinage  $V(x_1)$  de  $x_1$  sur lequel on peut prolonger la solution du système différentiel, ainsi qu'un niveau  $\{f = \varepsilon_2\}$  ( $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ ) traversé par la courbe intégrale  $\gamma_{x_0}$ . Le même type de calcul procure une majoration de la longueur de  $\gamma_{x_0}$  entre les niveaux  $\{f = \varepsilon_1\}$  et  $\{f = \varepsilon_2\}$ . Ainsi, on construit une

suite  $\dots < \varepsilon_n < \varepsilon_{n-1} < \dots < \varepsilon_1 < 0$ , telle que sur chaque intervalle  $]\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}[$  on a la majoration suivante :

$$l_{\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n}(\gamma_{x_0}) = |s_n - s_{n-1}| \leq \frac{|\psi'(\varepsilon'_n)| \cdot |\gamma_{x_0}(\delta_n)|}{C} \cdot |\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}|.$$

Avec  $\delta_n \in ]s_{n-1}, s_n[$ , et  $\varepsilon'_n = f[\gamma_{x_0}(\delta_n)] \in ]\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}[$ . De plus,  $\psi$  étant positive et strictement croissante sur  $]\varepsilon_n, 0[$ , on a, d'après le théorème de monotonie,  $\psi'(\varepsilon'_n) < \psi'(\varepsilon'_1)$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ . Remarquons également, que la suite  $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante, négative et minorée par  $t$ . Elle possède donc une limite  $t' \geq t$ . Mais, d'après la proposition 4.2.1, la courbe intégrale est entièrement contenue dans une boule dont le rayon  $R$  dépend essentiellement de  $t$ . D'où l'inégalité :

$$|s_n - s_{n-1}| \leq \frac{|\psi'(\varepsilon'_1)| \cdot R}{C} \cdot |\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}|.$$

On obtient donc :  $l_{0, \varepsilon_n}(\gamma_{x_0}) = s_n = (s_n - s_{n-1}) + (s_{n-1} - s_{n-2}) + \dots + (s_1 - 0)$ . C'est à dire :  $l_{0, \varepsilon_n}(\gamma_{x_0}) \leq A[(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) + (\varepsilon_{n-2} - \varepsilon_{n-1}) + \dots + \varepsilon_1] = -A\varepsilon_n$ . Avec  $A = \frac{|\psi'(\varepsilon'_1)| \cdot R}{C}$ . Ainsi, la suite  $\{s_n\}$  admet une limite finie lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , ce qui signifie en d'autres termes que  $\gamma_{x_0}$  est de longueur finie entre les niveaux  $\{f = 0\}$  et  $\{f = t'\}$ . Elle possède donc un point limite  $x_{t'} \in \{f = t'\}$ . Supposons  $t' > t$ , comme  $\nabla f(x_{t'}) \neq 0$ , on peut prolonger la courbe intégrale au delà du niveau  $\{f = t'\}$ , et en reprenant les calculs précédents, on montre que l'on peut atteindre n'importe quel niveau situé entre  $t$  et  $t'$  et que la longueur de  $\gamma_{x_0}$  est bornée par  $-At$ . Notons que  $A$  dépend continûment de  $x_0$  et de  $t$ . Ainsi, pour une valeur  $t$  fixée et pour tout  $x_0$  dans un compact de  $f^{-1}(0)$  la longueur de  $\gamma_{x_0}$  est uniformément bornée.

Ainsi, le flot du champ de gradient plonge chaque composante connexe du niveau  $f^{-1}(0)$  dans une composante connexe du niveau  $f^{-1}(t)$ . ■

Pour un polynôme complexe on définit les valeurs critiques asymptotiques de la même façon que dans le cas réel. On déduit alors le corollaire suivant du théorème de plongement 4.2.2 :

**Corollaire 4.2.3.** *Soit  $P : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction polynomiale complexe sans point critique. Supposons que 0 soit une valeur critique asymptotique de  $P$ . Si  $t$  est une valeur typique de  $P$ , alors il existe une immersion ouverte injective  $\varphi_{0,t} : P^{-1}(0) \rightarrow P^{-1}(t)$  plongeant chaque composante connexe de  $P^{-1}(0)$  dans une composante connexe de  $P^{-1}(t)$ .*

*Preuve.* Pour un polynôme  $P$  de  $\mathbb{C}^n$  on définit  $K_\infty(P)$  comme dans le cas o-minimal. L'ensemble des nombres complexes appartenant à  $K_\infty(P)$  est fini, et contient les valeurs atypiques de  $P$ . Ainsi, pour toute valeur régulière  $t$ , il existe un voisinage  $U_t$  de  $t$  au dessus duquel  $P$  est une fibration triviale.

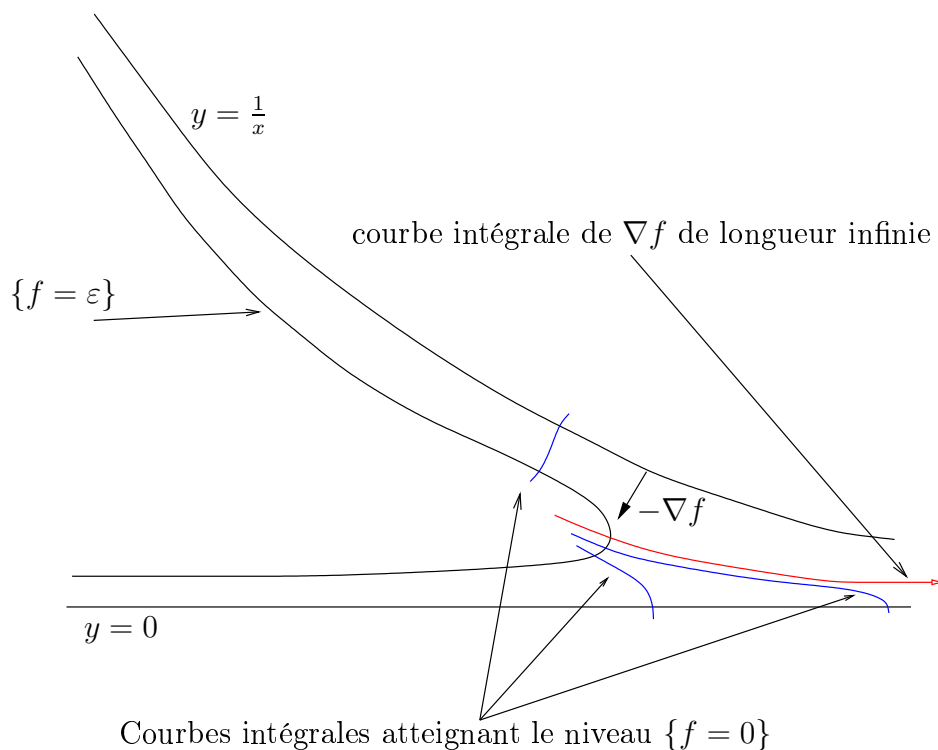
Soient  $t_0$  et  $t$  deux valeurs du polynôme  $P$  n'appartenant pas à  $K_\infty(P)$ . Alors il existe un chemin algébrique réel lisse  $\gamma : [0, 1] \ni s \mapsto \gamma(s) \in \mathbb{C}$  évitant les valeurs critiques asymptotiques de  $P$ . Ainsi, pour tout  $s \in [0, 1]$ , il existe un voisinage ouvert  $U_s$  de  $\gamma(s)$  tel que  $U_s \cap K_\infty(P) = \emptyset$ , et  $P$  est une fibration triviale au dessus de  $U_s$ . Par compacité, on peut recouvrir  $\text{Im}\gamma$  par un nombre fini de tels ouverts. Ainsi  $P$  est une fibration triviale au dessus de  $\text{Im}\gamma$  et il existe un difféomorphisme  $\varphi_{t_0,t} : P^{-1}(t_0) \rightarrow P^{-1}(t)$ .

En identifiant  $\mathbb{C}$  à  $\mathbb{R}^2$ , on peut voir  $K_\infty(P)$  comme un ensemble fini du plan. Soit  $L$  une droite passant par  $0 \in K_\infty(P)$ . On choisit la droite  $L$  de sorte qu'elle ne passe par aucune autre valeur critique asymptotique. Le polynôme  $P$  n'ayant pas de point critique,  $P$  est donc une submersion et  $\dim_{\mathbb{R}} P^{-1}(L) = 2n - 1$ . Identifions  $\mathbb{C}^n$  à  $\mathbb{R}^{2n}$ , et posons  $V_L = P^{-1}(L)$  la sous variété algébrique réelle lisse, plongée dans  $\mathbb{R}^{2n}$  et de dimension  $\dim_{\mathbb{R}} V_L = 2n - 1$ , puisque  $P$  est une submersion. On munit  $V_L$  de la structure riemannienne induite par la structure euclidienne de  $\mathbb{R}^{2n}$ . Soit  $f_L$  la restriction de  $P$  à  $V_L$ . La fonction  $f_L : V_L \rightarrow L$  est semi-algébrique et n'a qu'un nombre fini de valeurs critiques asymptotiques (cf 3.1.5). Notons aussi que  $f_L$  est une submersion, en particulier  $0$  n'est pas valeur critique de  $f_L$ . Ainsi, il existe  $t_0 \in L$  tel que l'intervalle  $]0, t_0]$  n'a que des valeurs typiques. Si  $0$  est une valeur critique asymptotique de  $f_L$ , alors d'après le théorème 4.2.2 il existe une immersion injective ouverte  $\Phi_{0,t_0} : f_L^{-1}(0) \rightarrow f_L^{-1}(t_0)$  qui plonge chaque composante connexe de  $f_L^{-1}(0)$  dans une composante connexe de  $f_L^{-1}(t_0)$ . Si  $0$  est une valeur typique de  $f_L$ , alors  $\Phi_{0,t_0}$  est un homéomorphisme. Ainsi il existe une immersion injective ouverte  $\varphi_{0,t_0} : P^{-1}(0) \rightarrow P^{-1}(t_0)$  qui plonge chaque composante connexe de  $P^{-1}(0)$  dans une composante connexe de  $P^{-1}(t_0)$ . Comme  $t_0$  et  $t$  sont des valeurs typiques de  $P$ , il existe un difféomorphisme  $\varphi_{t_0,t}$  comme ci-dessus et l'application  $\varphi_{0,t} = \varphi_{t_0,t} \circ \varphi_{0,t_0} : P^{-1}(0) \rightarrow P^{-1}(t)$  a les propriétés voulues. ■

**Corollaire 4.2.4.** *Soit  $f$  une fonction définissable,  $t < 0$  vérifiant les mêmes hypothèses que dans le théorème 4.2.2. Soit  $K$  un sous-ensemble compact de  $f^{-1}(0)$ . Alors, la longueur des courbes intégrales  $\gamma(x) \cap \{t \leq f \leq 0\}$  du champ  $\nabla f$  est uniformément bornée pour tout  $x \in K$ .*

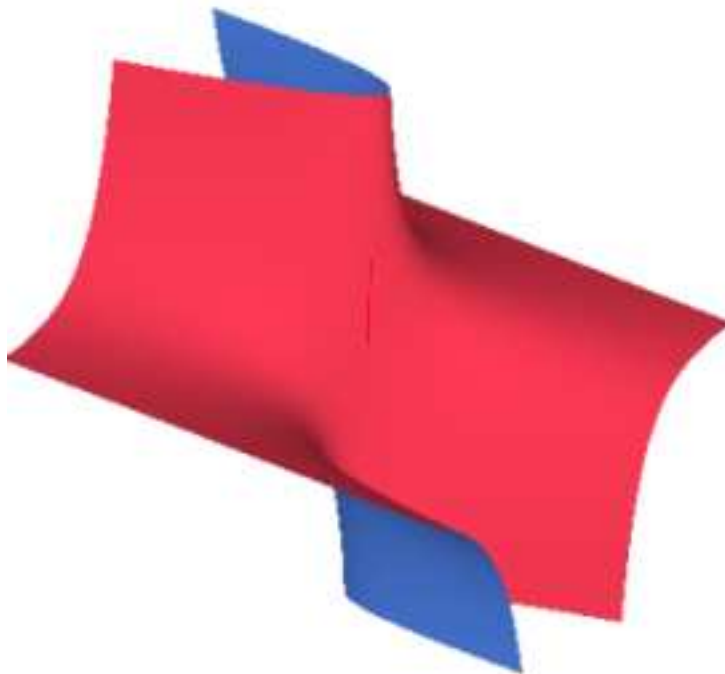
*Preuve.* D'après le théorème 4.2.2, la longueur d'une telle courbe intégrale est bornée par  $-A(x, t)t$ , où  $A$  est une fonction dépendant linéairement de  $|x|$ . Ainsi, pour un  $t$  fixé, la fonction  $A$  est uniformément continue en  $x$ . D'où la majoration uniforme de la longueur des trajectoires entre les niveaux  $t$  et  $0$ .

**Remarque 4.2.5.** Notons toutefois que la majoration sur la longueur des courbes intégrales entre un niveau typique et une valeur critique asymptotique n'est en général pas uniforme. Quand la valeur critique asymptotique est un point de bifurcation, on peut trouver des courbes intégrales de longueur arbitrairement grande. En effet, prenons l'exemple du polynôme de Broughton  $f(x, y) = y(xy - 1)$ . La valeur  $0$  est une valeur critique asymptotique, et le niveau  $\{f = 0\}$  est constitué de la droite  $\{y = 0\}$  et de l'hyperbole  $\{xy = 1\}$ . Ainsi, pour un niveau  $\{f = \varepsilon\}$  fixé,  $\varepsilon < 0$ , quels que soient les points de coordonnées  $(x_0, 0)$  et  $(x_1, 0)$ , avec  $x_0 < x_1$ , la courbe intégrale du champ  $-\nabla f$  passant par  $(x_0, 0)$  est de longueur strictement inférieure à celle passant par  $(x_1, 0)$ . Quand  $x_1$  tend vers  $+\infty$ , la longueur de la courbe intégrale tend aussi vers  $+\infty$ . (voir dessin ci-dessous).



C'est l'un des exemples les plus simples que l'on peut produire pour illustrer le théorème 4.2.2. Dans cet exemple on peut montrer qu'il n'y a qu'une

courbe intégrale de longueur infinie le long de laquelle  $f$  prend des valeurs arbitrairement proches de 0. Cette fonction constitue le point de départ d'une série de questions sur la nature de cette courbe intégrale.



Graphe de la fonction  $f(x, y) = y(xy - 1)$ .

### 4.3 Courbes intégrales de longueur infinie

On s'intéresse dans cette partie aux courbes intégrales de longueur infinie entre deux valeurs finies d'une fonction définissable. Cette étude fut motivée après avoir regardé en détail la fonction  $f(x, y) = y(xy - 1)$ . Cette fonction a la particularité d'être polynomiale, ce qui sans pour autant rendre le problème trivial, a tendance à le simplifier. On ne traitera dans cette partie que le cas de la dimension 2.

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définissable de classe  $C^2$ . Supposons que  $0 \in K_\infty(f)$ , et que pour tout  $t < 0$  suffisamment proche de 0, la fibre  $f^{-1}(t)$  est connexe. Notons  $I(t)$  l'ensemble des points de  $f^{-1}(t)$  par lesquels passe



une courbe intégrale du champ de gradient qui n'atteint pas le niveau 0. C'est à dire une courbe intégrale de longueur infinie entre les niveaux  $t$  et 0. Alors, on a la proposition suivante :

**Proposition 4.3.1.**  *$I(t)$  est un ensemble définissable et fermé dans  $f^{-1}(t)$ . Si  $I(t) \neq \emptyset$ , alors soit  $I(t) = f^{-1}(t)$ , soit  $I(t)$  est homéomorphe à une réunion finie d'intervalles fermés et de points.*

*Preuve.* La fibre  $f^{-1}(t)$  étant connexe et  $I(t) \neq \emptyset$ , deux situations distinctes se présentent alors :

(1) :  $f^{-1}(0) = \emptyset$ . Dans ce cas là, quel que soit le point de départ  $x_0$  sur le niveau  $f^{-1}(t)$ , la courbe intégrale n'atteint pas le niveau  $f^{-1}(0)$ .

(2) :  $f^{-1}(0) \neq \emptyset$ . Comme  $I(t) \neq f^{-1}(t)$ , il existe sur chaque composante connexe de  $f^{-1}(0)$  un point  $z_i$  tel que la courbe intégrale  $\gamma_{z_i}$  passant par  $z_i$  traverse également le niveau  $f^{-1}(t)$ . On peut illustrer ceci par la figure suivante (fig. 1).

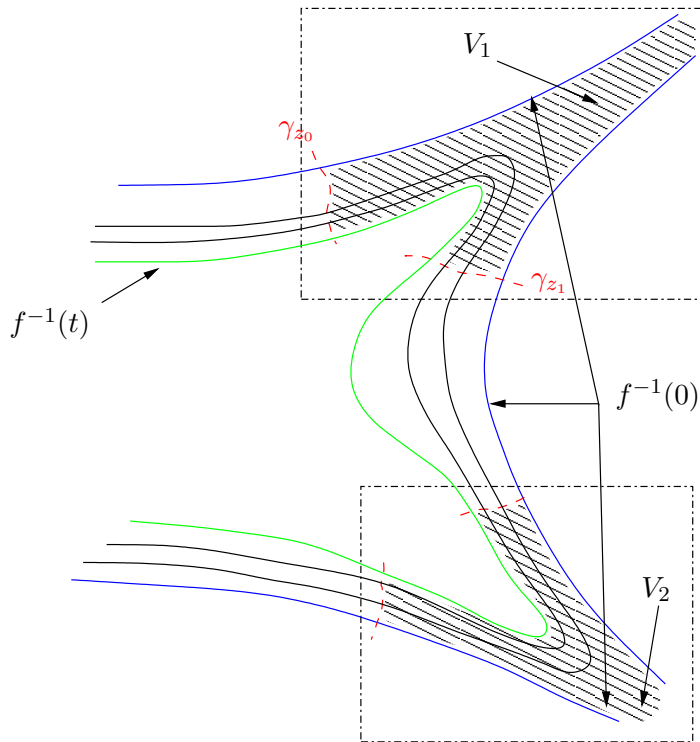
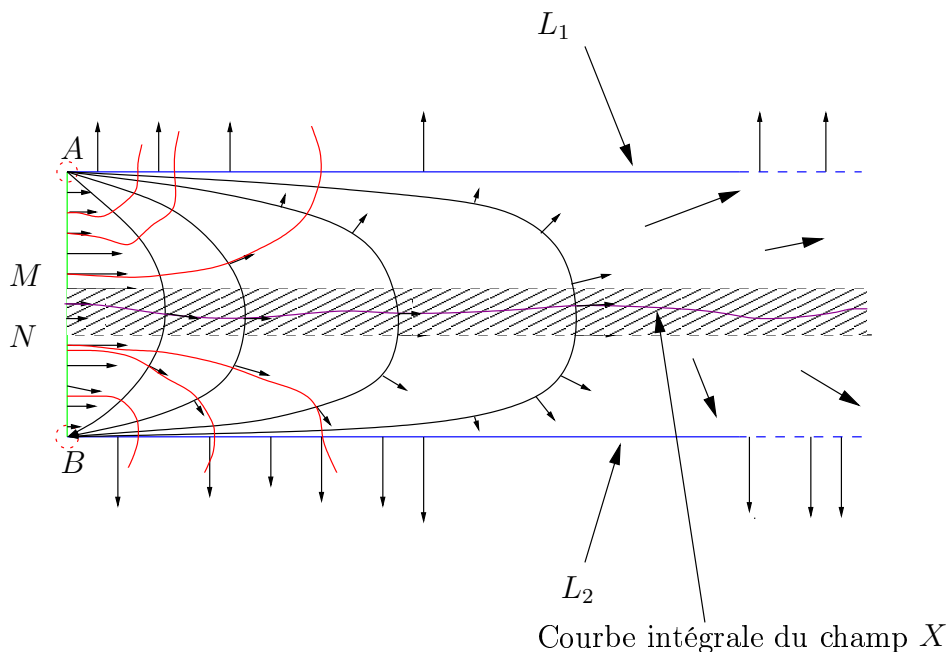


fig. 1

Soit  $V_1$  la partie du plan comprise entre les niveaux  $f^{-1}(t)$  et  $f^{-1}(0)$ , délimitée par les courbes intégrales  $\gamma_{z_0}$  et  $\gamma_{z_1}$ .

Dans un cas plus général, on peut considérer que le niveau 0 possède  $n + 1$  composantes connexes, où  $n$  est un entier strictement positif. On obtient alors

des voisinages  $V_1, \dots, V_n$ . Considérons alors l'un quelconque de ces voisinages, et quitte à le renommer on peut choisir  $V_1$ . Soit  $A_t$  (resp.  $B_t$ ) la restriction de  $\gamma_{z_0}$  (resp.  $\gamma_{z_1}$ ) à l'ensemble  $\{t \leq f \leq 0\}$ . En identifiant tous les points de  $A_t$  et de  $B_t$ , on peut donner une représentation de  $V_1$  sous la forme d'un demi-cylindre de longueur infinie dont la base  $]A, B[$  est identifiée à la partie de  $f^{-1}(t)$  comprise entre  $A_t$  et  $B_t$ .



Ainsi on se ramène à l'étude d'un champ de vecteur,  $X$  disons, continu à l'intérieur du demi-cylindre de base  $]A, B[$ . Le champ est rentrant en chaque point de  $]A, B[$  et sortant sur chaque coté de longueur infinie. Soit  $x$  un point arbitraire situé sur  $]A, B[$ .

Or, d'après le théorème 4.2.2, chaque point sur la demi-droite  $L_1$  est atteint par une courbe intégrale du champ de vecteur. L'intersection entre  $L_1$  et la courbe intégrale étant transverse, il existe un point  $M$  (resp. un point  $N$ ) sur l'intervalle  $]A, B[$ , tel que la courbe intégrale  $\gamma_1$  passant par  $C$  (resp. la courbe intégrale  $\gamma_2$  passant par  $N$ ) coupe  $L_1$  (resp.  $L_2$ ) transversalement. Alors, par chaque point de l'intervalle  $]A, M[$  (resp.  $]N, B[$ ) passe une courbe intégrale qui coupe  $L_1$  (resp.  $L_2$ ) transversalement. En effet, s'il existait un point  $p \in ]A, M[$  tel que la courbe intégrale  $\gamma_p$  passant par  $p$  ne rencontrait pas  $L_1$ , alors les courbes  $\gamma_1$  et  $\gamma_p$  auraient un point d'intersection. Ce qui est impossible puisque le champ est localement lipschitzien et non singulier. Ainsi, l'ensemble des

points sur  $]A, B[$  par lesquels passe une courbe intégrale ne coupant ni  $L_1$  ni  $L_2$  est contenu dans un intervalle fermé (éventuellement d'intérieur vide)  $[\alpha, \beta] \subsetneq ]M, N[$ .

Soit  $D_1$  (resp.  $D_2$ ) l'ensemble des points de  $]A, B[$  par lesquels passe une courbe atteignant  $L_1$  (resp.  $L_2$ ). Alors les ensembles  $D_1$  et  $D_2$  sont ouverts dans  $]A, B[$ . En effet, le champ  $X$  étant continu, les courbes intégrales sont continues, ainsi que l'application  $x \rightarrow \gamma_1(x)$  (resp.  $x \rightarrow \gamma_2(x)$ ), qui à un point  $x$  de  $D_1$  (resp.  $D_2$ ) associe le point d'intersection entre la courbe intégrale passant par  $x$  et l'intervalle  $]A, B[$ . Ainsi, l'image réciproque d'un ouvert de  $D_1$  (resp. de  $D_2$ ) est un ouvert strictement inclus dans l'intervalle  $]A, B[$ .

Soient  $U = \gamma_1(D_1)$  et  $V = \gamma_2(D_2)$ . Les ensembles  $U$  et  $V$  sont connexes pour la raison déjà invoquée précédemment (unicité des courbes intégrales du champ  $X$  passant par un point à l'intérieur du cylindre), c'est à dire qu'entre deux courbes intégrales données atteignant  $D_1$  on ne peut pas trouver de courbe intégrale atteignant  $D_2$  ou n'atteignant ni  $D_1$  ni  $D_2$ .

Il existe donc  $S, T \in ]A, B[$  tels que  $U = ]A, S[$  et  $V = ]T, B[$ . Ainsi, l'ensemble des points de  $]A, B[$  par lesquels passe une courbe intégrale du champ  $X$  qui n'atteint ni  $D_1$  ni  $D_2$  est l'intervalle fermé  $[S, T]$ .

Donc,  $I(t) \cap V_1$  est homéomorphe à un intervalle fermé, et  $I(t)$  est homéomorphe à une réunion finie d'intervalles fermés. Notons qu'on peut avoir  $S = T$ . ■

**Corollaire 4.3.2.** *Soit  $f$  vérifiant les mêmes hypothèses que dans la proposition 4.3.1. Soit  $i$  le nombre de composantes connexes de l'ensemble  $I(t)$ . Soit  $N_0$  le nombre de composantes connexes de la fibre  $f^{-1}(0)$ . On a alors l'égalité suivante :*

$$N_0 = 1 + i - (\chi(f^{-1}(t)) + 1).$$

Où  $\chi(f^{-1}(t))$  désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré relativement à la cohomologie à support compact.

*Preuve.* D'après le théorème 4.2.2 et la proposition 4.3.1, chaque composante connexe du niveau  $f^{-1}(0)$  se plonge dans  $f^{-1}(t)$  et ce plongement est une bijection sur l'une des composantes connexes de  $f^{-1}(t) \setminus I(t)$ . Si la fibre  $f^{-1}(t)$  est compacte, alors le nombre de composantes connexes de  $f^{-1}(t) \setminus I(t)$  est égal à  $i$ . Dans le cas où  $f^{-1}(t)$  n'est pas compacte, ce nombre est égal à

$i + 1$ . La fibre  $f^{-1}(t)$  étant une courbe lisse, chaque composante connexe est soit homologue au cercle, soit à la droite réelle. Donc, si  $f^{-1}(t)$  est compacte, sa caractéristique d'Euler est nulle, sinon elle est égale à  $-1$ . Ce qui donne l'égalité voulue. ■

**Corollaire 4.3.3.** *Supposons maintenant que  $f^{-1}(t)$  possède  $N_t$  composantes connexes. Soient  $C_1, \dots, C_{N_t}$  les composantes connexes de la fibre  $f^{-1}(t)$ . Pour chaque composante  $C_p$ , l'ensemble  $I_p(t)$  est défini comme dans la proposition 4.3.1 et soit  $i_p$  le nombre de composantes connexes de  $I_p(t)$ . Supposons de plus que pour tout  $p = 1, \dots, N_t$  on a  $\emptyset \neq I_p(t) \subsetneq C_p$ . Alors si  $N_0$  désigne le nombre de composantes connexes de  $f^{-1}(0)$ , on a l'égalité suivante :*

$$N_0 - N_t = \sum_{p=1}^{N_t} (i_p - (\chi(C_p) + 1)).$$

*Preuve.* C'est une conséquence immédiate du corollaire précédent en sommant sur le nombre de composantes connexes. ■

**Définition 4.3.4.** *Soit  $f$  une fonction définissable comme ci-dessus. Soient  $t_1 < t_2 \in \mathbb{R}$  tels que  $[t_1, t_2] \cap K_f = \emptyset$ . Soient  $C_1$  une composante connexe du niveau  $f^{-1}(t_1)$  et  $C_2$  une composante connexe du niveau  $f^{-1}(t_2)$ . On dira que  $C_1$  et  $C_2$  sont équivalentes et on écrira  $C_1 \sim C_2$ , si le flot du champ  $\nabla f$  réalise une bijection entre  $C_1$  et  $C_2$ . La relation  $\sim$  définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des composantes connexes des fibres de la fonction  $f$ .*

*Pour une composante connexe  $C \subset f^{-1}(t)$ , on désigne par  $Cl(C)$  l'ensemble des composantes connexes  $D_{t'} \subset f^{-1}(t')$  telles que  $D_{t'} \sim C$ .*

**Lemme 4.3.5.** *Soit  $f$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $C_1$  et  $C_2$  comme dans la définition ci-dessus. Alors pour toute valeur  $t \in [t_1, t_2]$ , il existe une composante connexe  $C_t$  de  $f^{-1}(t)$  telle que  $C_1 \sim C_t$ .*

*Preuve.* C'est une conséquence immédiate du théorème de plongement (4.2.2), puisque l'intervalle  $[t_1, t_2]$  ne contient ni valeur critique, ni valeur critique asymptotique. ■

**Définition 4.3.6.** *Supposons que  $0 \in B_f \setminus K_0(f)$ , et  $C$  une composante connexe d'un niveau  $f^{-1}(t)$  pour  $t$  proche de 0. On dira que  $Cl(C)$  est évanes-*

cente en 0 si et seulement si pour toute composante connexe  $C_0$  de  $f^{-1}(0)$  on a  $C_0 \notin Cl(C)$ .

**Proposition 4.3.7.** *Soit  $f$  définie comme dans la définition 4.3.6 et soit 0 une valeur de bifurcation pour  $f$ . Soit  $t$  une valeur arbitrairement proche de 0. Soient  $C_1, \dots, C_k$  l'ensemble des composantes connexes de la fibre  $f^{-1}(t)$  telles que pour tout  $p \in \{1, \dots, k\}$  on a  $\emptyset \neq I_p(t) \subsetneq C_p$ . Soit  $n_v$  le nombre de composantes connexes évanescentes en 0 du niveau  $f^{-1}(t)$ . Soient  $N_0$  le nombre de composantes connexes du niveau  $f^{-1}(0)$  et  $N_t$  celui du niveau  $f^{-1}(t)$ . Alors on a l'égalité suivante :*

$$N_0 - N_t = \sum_{p=1}^k (i_p - (\chi(C_p) + 1)) - n_v.$$

*Preuve.* Chaque composante connexe évanescence en 0 diminue de 1 le nombre composantes connexes du niveau 0. Ainsi on se ramène au cas où  $f^{-1}(0)$  ne contient aucune composante évanescence en 0. Ensuite en isolant les composantes connexes du niveau 0 appartenant à l'une des classes d'équivalence de  $f^{-1}(t)$ , on est réduit au cas du corollaire 4.3.3. Ce qui implique l'égalité. ■

**Remarque 4.3.8.** La définition 4.3.6 signifie entre autre qu'une composante évanescence d'un niveau générique  $t$  voisin du niveau 0 (la valeur 0 est encore supposée atypique) est séparée de n'importe quelle composante connexe de  $f^{-1}(0)$ . Ainsi, il suffit d'étudier les composantes connexes d'une fibre générique qui "créent" des composantes connexes sur le niveau atypique.



# Chapitre 5

## Courbes intégrales définissables

### 5.1 Courbes intégrales remarquables

On s'intéresse ici à l'ensemble des points réalisant le minimum en norme du champ de gradient sur les niveaux d'une fonction définissable. Sous certaines conditions cet ensemble contient des courbes intégrales de longueur infinie du champ de gradient.

**Observation 5.1.1.** Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définissable de classe  $C^2$  dans une structure o-minimale  $\mathcal{M}$ . On pose  $X(x) = \nabla f(x)$  et  $H_f(x)$  la matrice Hessienne de  $f$  en  $x$ . Alors l'ensemble des points sur les fibres de  $f$  où la norme du gradient est minimale est contenu l'ensemble des points pour lesquels il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $H_f(x)X(x) = \lambda X(x)$ , ce qui correspond exactement au noyau de la 2-forme :  $d(|\nabla f|^2) \wedge df$  du chapitre 2. Un tel ensemble est définissable dans  $\mathcal{M}$ . Comme dans le chapitre 2, on peut décrire le lieu des extrema par un système d'équations indépendantes :

$$h_1(x) = \dots = h_{n-1}(x) = 0.$$

On note  $\Lambda_f$  le lieu des extrema de  $|\nabla f|$  sur les fibres de  $f$

Supposons  $f$  comme dans l'observation 5.1.1, et supposons de plus que 0 est une valeur critique asymptotique. On veut savoir à quelle condition une courbe définissable réalisant le minimum de la norme du champ de gradient sur les fibres est une courbe intégrale pour le champ de gradient.

**Courbure 5.1.2.** On considère une courbe intégrale  $X_0$  du champ  $\nabla f$ . Soit  $\gamma$  une paramétrisation de  $X_0$  par la longueur d'arc (i.e. pour toute valeur  $s \geq 0$

du paramètre on a :  $|\gamma'(s)| = 1$ ). Ainsi  $\gamma$  satisfait en chaque point l'équation différentielle :

$$\gamma'(s) = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}(\gamma(s)). \quad (5.1)$$

Si  $\gamma$  est une paramétrisation de  $X_0$  par la longueur d'arc, alors  $|\gamma''(s)|$  désigne la courbure de la courbe  $X_0$  au point  $\gamma(s)$ . En dérivant les deux membres de l'équation (5.1), on obtient l'égalité suivante :

$$\gamma''(s) = \frac{1}{|\nabla f|^2} (|\nabla f| \cdot H_f \frac{\nabla f}{|\nabla f|} - \nabla f \langle \nabla f, H_f \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \rangle) \circ (\gamma(s)).$$

En posant  $v = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}(\gamma(s))$  on obtient :

$$\gamma''(s) = \frac{1}{|\nabla f|} (H_f v - \langle v, H_f v \rangle v) \circ (\gamma(s)). \quad (5.2)$$

**Propriété de  $\Lambda_f$  5.1.3.** En tout point  $x$  de  $\Lambda_f$ , le vecteur  $\nabla f(x)$  est vecteur propre de la matrice Hessienne  $H_f(x)$ . Si de plus on suppose que 0 est une valeur critique asymptotique sans être une valeur critique, alors il existe pour un  $a < 0$  un intervalle  $[a, 0]$  tel que pour tout  $t \in [a, 0]$  n'est ni une valeur critique ni une valeur critique asymptotique. Et pour tout  $x$  dans  $\Lambda_f \cap \{a \leq f \leq 0\}$  on a  $\nabla f(x) \neq 0$ . Soit  $\lambda(x)$  la valeur propre associée au vecteur  $\nabla f(x)$ .

**Proposition 5.1.4.** *Si la courbe intégrale  $X_0$  est contenue dans  $\Lambda_f$ , alors c'est une droite.*

*Preuve.* En tout point  $x \in \Lambda_f$  on a  $H_f(x)v(x) = \lambda(x)v(x)$ . Ainsi l'équation (5.2) devient :

$$\gamma''(s) = \frac{1}{|\nabla f|} (\lambda v - \langle v, \lambda v \rangle v) \circ (\gamma(s)).$$

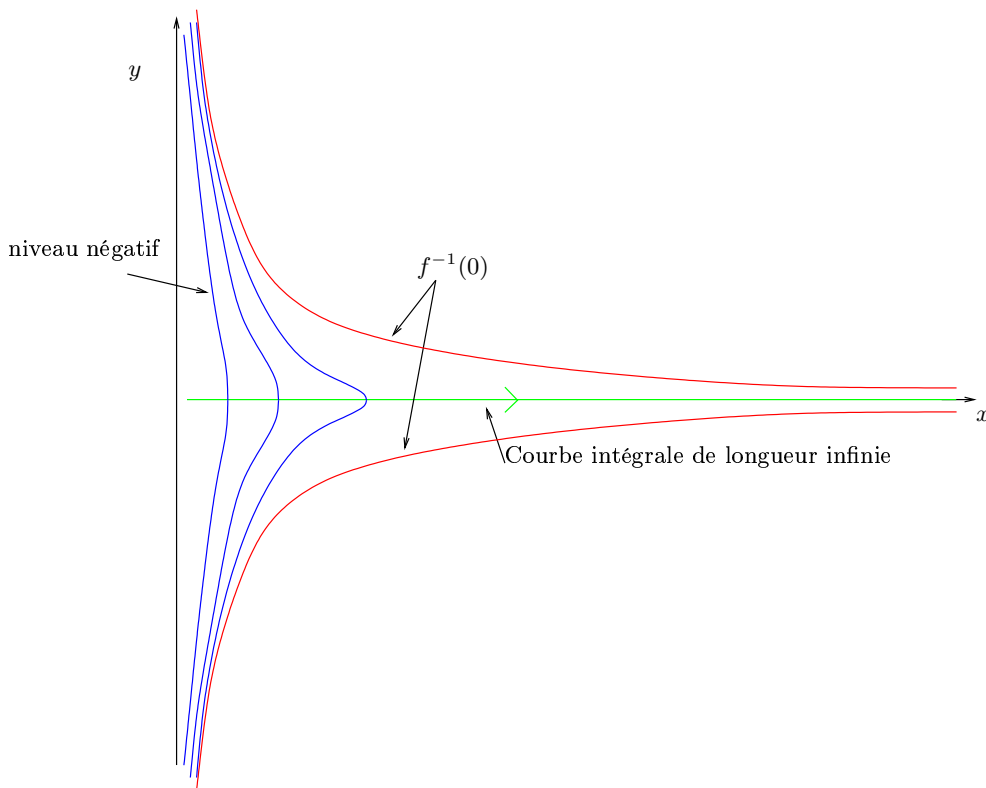
Comme  $v$  est unitaire, on obtient  $\gamma''(s) = 0$  pour toute valeur  $s$  du paramètre. Ce qui signifie bien que la courbe  $X_0$  est une droite. ■

**Exemple 5.1.5.** Soit  $S$  une sous variété de  $\mathbb{R}^n$ , définissable et de classe  $C^2$ . On note  $d(\cdot, \cdot)$  la métrique Euclidienne. Il existe (cf. [Po-Ra]) un voisinage  $U \subset \mathbb{R}^n$  de  $S$  tel que la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \text{dist}(x, S)^2$ , pour tout  $x \in U$ , est de classe  $C^2$ .

Evidemment, la norme de  $\nabla f$  est constante sur les niveaux  $\{f = t\}$ . Ainsi, les courbes intégrales du champ de gradient sont des droites affines orthogonales à  $S$ .



**Exemple 5.1.6.** On considère le cusp à l'infini correspondant au niveau 0 de la fonction semi-algébrique  $f$  définie sur  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  par :  $f(x, y) = y^2 - \frac{1}{x^3}$ . Pour  $t < 0$ , chaque ligne de niveau  $\{f = t\}$  possède une équation explicite  $x = (y^2 - t)^{-\frac{1}{3}}$ . On peut donc expliciter en fonction de  $y$  et  $t$  la valeur de  $|\nabla f|^2$  sur le niveau  $\{f = t\}$ . Soit :  $|\nabla f|^2 = 9(y^2 - t)^{\frac{8}{3}} + 4y^2$ . Ainsi, sur  $\{f = t\}$ , le minimum de  $|\nabla f|$  est atteint au point de coordonnées  $((-t)^{-\frac{1}{3}}, 0)$ . De plus, en ces points le gradient est horizontal. Ainsi, la droite  $]0, +\infty[ \times \{0\}$  est une courbe intégrale du champ de gradient.



**Remarque 5.1.7.** Dans le dernier cas, on obtient bien une trajectoire semi-algébrique. En fait cette courbe intégrale est définissable dans n'importe quelle structure o-minimale. Le fait de se demander dans quelle mesure une composante connexe de l'ensemble des points qui réalisent le minimum de  $|\nabla f|$  sur les niveaux de  $f$  est une courbe intégrale du champ de gradient, constitue une tentative de réponse à la question suivante :

*Une courbe intégrale du champ  $\nabla f$  qui n'atteint pas un niveau atypique (i.e. qui est de longueur infinie entre deux valeurs finies de  $f$ ) est-elle définissable dans la même structure que  $f$  ?*

Évidemment, toute composante connexe de l'ensemble  $\Lambda_f$  est définissable. Néanmoins, l'étude précise de certains exemples offre à penser qu'une telle courbe intégrale est proche de l'une des branches de  $\Lambda_f$ . De plus on peut montrer que pour une fonction définissable  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , certaines composantes connexes de  $\Lambda_f$  coïncident avec le lieu des points d'inflexion des courbes intégrales.

## 5.2 Séparatrices réelles

On considère une fonction définissable  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ . On suppose de plus que 0 est une valeur critique asymptotique. On s'intéresse ici aux courbes intégrales  $\gamma$  du champ de gradient  $\nabla f$  qui sont de longueur infinie et sur lesquelles  $f$  reste bornée au voisinage de la valeur 0. Laissons de côté les trajectoires situées sur une composante évanescence en 0.

D'après le chapitre 4, il suffit de considérer séparément chacune des composantes connexes d'un niveau générique (appelons les  $C_1, \dots, C_k$ ) voisin de 0, puis d'étudier chacune des composantes connexes de  $I_p(t)$  pour  $p = 1, \dots, k$ . Notons  $I_p^c(t)$  la réunion des composantes connexes compactes de  $I_p(t)$ .

**Conjecture 5.2.1.** *Si  $f$  est une fonction polynomiale, alors pour tout  $t$  suffisamment proche de 0, et pour tout  $p = 1, \dots, k$  l'ensemble  $I_p^c(t)$  est fini.*

Ceci est lié à la question suivante :

*Étant donnée une fonction méromorphe  $f$ , le théorème de Moussu (cf [Mo]) est-il encore vrai ? Plus précisément, soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction rationnelle de la forme  $f(x, y) = \frac{p(x, y)}{q(x, y)}$  où  $p$  et  $q$  sont des polynômes tels que  $p(0) = q(0) = 0$ . Supposons qu'il existe une trajectoire  $] -\varepsilon, \varepsilon[ \ni t \mapsto \alpha(t)$  du champ  $\nabla f$  telle que  $\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = 0 \in \mathbb{R}^2$ . Existe-t-il  $t \mapsto \beta(t)$  analytique telle que  $\beta'(0) \neq 0$  et  $\beta'(t) = b(t)\nabla f(\beta(t))$  avec  $b(t) \in \mathbb{R}_+$  ?*

La question suivante apparaît naturellement dans le contexte des ensembles semi-algébriques. Toutefois, les concepts mis en valeur dans ce contexte se généralisent au cas des structures o-minimales polynomialement bornées.

**Conjecture 5.2.2.** *Si  $f$  est définissable dans une structure o-minimale polynomialement bornée, alors pour tout  $t$  suffisamment proche de 0, et pour tout  $p = 1, \dots, k$  l'ensemble  $I_p^c(t)$  est fini.*

Si ces conjectures sont vraies alors, on obtient un nombre fini de telles courbes intégrales sur lesquelles la fonction  $f$  reste bornée. Ces courbes intégrales définissent des séparatrices réelles pour le champ de gradient. Bien sur, la question ne se pose pas dans le cas d'une structure o-minimale qui contient la fonction exponentielle. On peut produire des exemples de fonction pour lesquelles on a une infinité de telles courbes intégrales, sans pour autant que ces trajectoires soient situées sur des composantes évanescences.

D'un autre côté, il semble peu probable que les séparatrices si elles sont en nombre fini restent définissables dans la structure o-minimale de départ.



# Bibliographie

- [B-C-R] J. BOCHNAK, M. COSTE, M.F. ROY, *Real algebraic geometry*, E.M.G vol. 36 (1998) Springer.
- [Be-Ri] R. BENEDETTI, J. J. RISLER, *Real algebraic and semi-algebraic sets*, Actualités Mathématiques, Hermann, Paris (1990).
- [C-M-S] F. CANO, R. MOUSSU, F. SANZ, *Oscillation, spiralement, tourbillonnement*, Comment. Math. Helv. 75, No.2 (2000), 384-318.
- [Ch] F. CHAZAL, *Sur les feuilletages de Rolle* Thèse de l'université de Bourgogne (1997).
- [Co] M. COSTE, *An introduction to o-minimal geometry*, Dip. Mat. Univ. Pisa, Dottorato di Ricerca in Matematica, Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali, Pisa (2000).
- [Co-Pu] M. COSTE, M. J. DE LA PUENTE, *Atypical values at infinity of a polynomial function on the real plane : an erratum and an algorithmic criterion*, J. Pure Appl. Algebra 162 (2001), pp. 23-35.
- [D'A] D. D'ACUNTO, *Valeurs Critiques Asymptotiques d'une Fonction Définissable dans une Structure o-minimale*, Ann. Pol. Math, 35 (2000), pp. 35-45.
- [Do] S. K. DONALDSON, *Symplectic submanifold and almost-complex geometry*, J. Diff. Geometry 44 (1996), pp. 666-705.
- [vD] L. VAN DEN DRIES, *Tame topology and o-minimal structures*, London Math. Soc Lecture Notes 248, Cambridge University Press.
- [vD-Mi] L. VAN DEN DRIES, C. MILLER, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. Journal, 84 (1996), pp. 497-540.
- [Ga] T. GAFFNEY, *Fibers of polynomial mappings at infinity and a generalized Malgrange condition*, Compositio Math. 119 (1999), pp. 157-167.
- [Fe-Pu] J. FERRERA, M. J. DE LA PUENTE, *The asymptotic values of a polynomial function on the real plane*, J. Pure Appl. Alg. 106 (1996), pp.163-273.

- [Je-Ku] Z. JELONEK, K. KURDYKA, *On asymptotic critical values of a complex polynomial*, Preprint Univ. Savoie (2000).
- [Ku1] K. KURDYKA, *On a subanalytic stratification satisfying a Whitney property with exponent 1*, Proc. Conference Real Algebraic Geometry - rennes 1991, Springer L.N.M 1524 (1992), pp. 316-322.
- [Ku2] K. KURDYKA, *On gradients of functions definable in o-minimal structures*, Ann. Inst. Fourier, 48-3 (1998), pp. 769-783.
- [K-M-P] K. KURDYKA, T. MOSTOWSKI, A. PARUSIŃSKI, *Proof of the gradient conjecture of R. Thom*, Annals of Math. (to appear).
- [K-O-S] K. KURDYKA, P. ORRO, S. SIMON, *Semialgebraic Sard theorem for generalized critical values*, J. Diff. Geometry (à paraître).
- [Ku-Pa] K. KURDYKA, A. PARUSIŃSKI, *Quasi-convex decomposition in o-minimal structures. Application to the gradient conjecture*, Preprint de l'Université d'Angers.
- [Li-Ro] J. M. LION, J. P. ROLIN, *Théorème de préparation pour les fonctions logarithmico-exponentielles*, Ann. Inst. Fourier 47, No.3 (1997), pp. 859-884.
- [Loi-Za] T. L. LOI, A. ZAHARIA, *Bifurcation sets of functions definable in o-minimal structures*, Illinois Journal of Math. 42-3 (1998), pp. 449-457.
- [Ło] S. ŁOJASIEWICZ, *Sur les trajectoires du gradient d'une fonction analytique*, Semin. Geom., Univ. Studi Bologna 1982/1983 (1984), pp. 115-117.
- [Mi1] C. MILLER, *Exponentiation is hard to avoid*, Proc. AMS, 122-1 (1994), pp. 257-259.
- [Mi2] C. MILLER, *Infinite differentiability in polynomially bounded o-minimal structures*, Proc. Am. Math. Soc. 123, No.8 (1995), pp. 2551-2555.
- [Mo] R. MOUSSU, *Sur la dynamique des gradients. Existence de variétés invariantes*, Math. Ann. 307, No.3 (1997), pp.445-460.
- [Pal] R.S. PALAIS, *Lusternik-Schnirelman theory on Banach manifolds*, Topology 11 (1972), pp. 115-131.
- [Par] A. PARUSIŃSKI, *On the bifurcation set of complex polynomial with isolated singularities at infinity*, Compositio Math. 97 (1995), pp. 131-141.
- [Po-Ra] J. B. POLY, G. RABY, *Fonction distance et singularités*. Bull. Sci. Math., II. Sér. 108 (1984), pp. 187-195.
- [Rab] P. J. RABIER, *Ehresmann fibrations and Palais-Smale conditions for morphisms of Finsler manifolds*, Ann. of Math. 146 (1997), pp. 647-691.

- [Ro1] M. ROSENLICHT *Hardy fields*, J. Math. Anal. Appl. 93 (1983), pp. 297-311.
- [Ro2] M. ROSENLICHT *The rank of a Hardy field*, Trans. AMS 280-2 (1983), pp. 659-671.
- [Ti-Za] M. TIBAR, A. ZAHARIA, *Asymptotic behaviour of families of real curves*, Manuscr. Math. 99, No.3 (1999), pp. 383-393.
- [Wi1] A. J. WILKIE, *A theorem of the complement and some new o-minimal structures*, Sel. Math., New Ser. 5, No.4 (1999), pp. 397-421.
- [Wi2] A. J. WILKIE, *On the theory of the real exponential field*, Ill. J. Math. 33, No.3 (1989), pp. 384-408.
- [Yo] Y. YOMDIN, *The geometry of critical and near-critical values of differentiable mappings*, Math. Ann. 4 (1983), pp. 495-515.

## Résumé

L'objet de ce travail est l'étude des courbes intégrales du champ de gradient de fonctions définissables dans une structure o-minimale. On s'intéresse au comportement des courbes intégrales au voisinage d'une fibre atypique.

Le premier chapitre rappelle certaines propriétés géométriques des ensembles définissables dans une structure o-minimale.

Le deuxième chapitre s'attache à l'étude d'une famille définissable de fonctions définies sur des ouverts contenus dans un même compact. On montre par la formule de Cauchy-Crofton que la longueur des courbes intégrales du champ de gradient de chaque fonction est majorée par une constante ne dépendant que de la dimension et du compact. On en déduit ensuite une borne explicite dans le cas d'un polynôme générique de degré fixé.

Le troisième chapitre est consacré aux fonctions  $C^1$  définies sur des ouverts non bornés. On montre que l'ensemble des valeurs ne vérifiant pas la condition de Malgrange (valeurs critiques asymptotiques) est fini et contient les valeurs atypiques qui ne sont pas valeurs critiques.

On établit dans le quatrième chapitre un théorème de plongement d'une composante connexe arbitraire d'une fibre correspondant à la valeur critique asymptotique dans une composante connexe d'une fibre typique voisine. Ce résultat, obtenu par une inégalité du type Łojasiewicz à l'infini, permet de comprendre les changements de type topologiques des fibres d'une fonction définissable au voisinage d'une valeur atypique. En dimension deux, on décrit l'ensemble des points d'une fibre typique par lesquels passe une courbe intégrale du champ de gradient qui n'atteint pas le niveau atypique.

Enfin, le dernier chapitre étudie certaines courbes intégrales remarquables du champ de gradient. Une courbe réalisant le minimum de la norme du gradient sur les niveaux est une courbe intégrale du champ de gradient si et seulement si c'est une droite. Ce résultat conduit à s'interroger sur la finitude de séparatrices du champ de gradient d'une fonction polynomiale.

**Mots clefs.** Structures o-minimales, géométrie semi-algébrique, champ de gradient, valeur atypique, valeur critique asymptotique, condition de Malgrange, inégalité de Łojasiewicz.

## Abstract

This work is devoted to the study of the trajectories of gradient vector fields of functions definable in an o-minimal structure. We focus on the behaviour integral curves in some neighbourhood of an atypical fiber.

The first chapter recalls some geometric properties of definable sets.

In the second chapter, we study of a definable family of functions defined on open sets all contained in the same compact set. By the Cauchy-Crofton formula, we prove that the length of the gradient field trajectories of each function is bounded by some constant depending only on the dimension and the compact set. We then deduce an explicit bound in the case of a generic polynomial of given degree.

The third chapter is devoted to  $C^1$  functions defined on non bounded open sets. We prove that the set of values at which the Malgrange condition fails (asymptotic critical values) is finite and contains the atypical values which are not critical values.

In the fourth chapter, we prove an embedding theorem from an arbitrary connected component of an asymptotic critical fiber in a connected component of a close typical fiber. This result, obtained from some Łojasiewicz type inequality at infinity, gives a better understanding on the changes of the topological types of the fibers of a definable function in a neighbourhood of an atypical value. In dimension two, we describe the set of points of a typical fiber at which passes a trajectory of the gradient field which does not reach the atypical level.

In the last chapter, we study some remarkable integral curves of the gradient field. We show that a curve on which the norm of the gradient is minimal on the levels is an integral curve of the gradient field if and only if it is a line. Such a result leads to ask the question of the finiteness of the gradient field separatrix in the polynomial case.

**Key words.** o-minimal structures, semi-algebraic geometry, gradient field, atypical value, asymptotic critical value, Malgrange condition, Łojasiewicz inequality.

**AMS classification.** 03C64, 14P05, 14P10, 32S15, 37C10.