Université de Savoie **LST1**
2009-2010

M101

Td 4. Fonctions
8 séances.

1 Fonctions usuelles

Exercice 1.

1. Recopier et compléter
   a) $\forall x \in$ .... $\text{Arcsin}(\sin(x)) = x$
   b) $\forall x \in$ .... $\text{Arccos}(\cos(x)) = x$
   c) $\forall x \in$ .... $\text{Arctan}(\tan(x)) = x$
   d) $\forall x \in$ .... $\sin(\text{Arcsin}(x)) = x$
   e) $\forall x \in$ .... $\cos(\text{Arccos}(x)) = x$
   f) $\forall x \in$ .... $\tan(\text{Arctan}(x)) = x$
2. Calculer la valeur de $A = \cos(2\text{Arcsin}0,6)$, $B = \text{Arctan}\frac{1}{2} + \text{Arctan}\frac{1}{3}$ et $C = \tan(2\text{Arctan}\frac{\sqrt{3}}{2})$.
3. Soit α un réel, résoudre $\text{Arccos}(2x+1) = \alpha$

Exercice 2.

1. Exprimer $\tan(4a)$ en fonction de $\tan(a)$.
2. En déduire que $\pi/4 = 4\text{Arctan}\frac{1}{5} - \text{Arctan}\frac{1}{239}$. Cette formule (de John Machin) permet de calculer très rapidement un grand nombre de décimales de π. En effet, on sait (vous l'apprendrez plus tard) obtenir rapidement un grand nombre de décimales de Arctan x en utilisant le fait que, si $u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$, alors $u_n(x) \to \text{Arctan}(x)$ quand $n \to \infty$.

Exercice 3. Montrer :
– Pour tout x, $\text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \pi/2$.
– Pour tout $x > 0$, $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(1/x) = \pi/2$.

Exercice 4. Soit f la fonction définie par $f(x) = \text{Arccos}\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} - \frac{x}{2}$.

1. Préciser les ensembles de définition et de continuité de f.
2. Exprimer $f(x+2\pi)$ en fonction de $f(x)$.
3. Simplifier l'expression de $f(x)$ lorsque $x \in [-\pi, \pi]$. En déduire le graphe de f.

Exercice 5. Simplifier les expressions : $f(x) = \cos^2(\text{Arctan}x)$, $g(x) = \text{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $h(x) = \text{Arcsin}(\sin x)$ et $k(x) = \text{Arctan}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$. Tracer les graphes de h et k.

Exercice 6. Résoudre l'équation : $\text{Arctan}2x + \text{Arctan}x = \frac{\pi}{4}$

Exercice 7.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   a) $\cosh(x) = 2$
   b) $\sinh(x) = 2$
   c) $2 * \sinh(x) - \cosh(x) = 1$
2. Recopier et compléter :
   a) $\forall x \in$ .... $\text{Argch}(\cosh(x)) = x$
   b) $\forall x \in$ .... $\text{Argsh}(\sinh(x)) = x$
   c) $\forall x \in$ .... $\cosh(\text{Argch}(x)) = x$
   d) $\forall x \in$ .... $\sinh(\text{Argsh}(x)) = x$
3. Recopier et compléter en discutant suivant les valeurs de x : $\text{Argch}(\cosh(x)) = \dots$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\text{Argch}(x) = \text{Argsh}(2 - x)$

Exercice 8. Montrer :

1. Si $x \in \mathbb{R}$, alors $|\sin x| \leq |x|$
2. Si $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, alors $1 - \cos x \leq x \sin x$ (2 méthodes)
3. Si $x \in]-1, 1[$, alors $|\text{Arcsin} x| \leq \dfrac{|x|}{\sqrt{1 - x^2}}$
4. Si $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, alors $3x < 2 \sin x + \tan x$

2 Limites

Exercice 9. Étudiez la limite de la fonction f aux points proposés :

1. $f(x) = (1 - 3x)(2x - 1)^2$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. $f(x) = \dfrac{x - 1}{2} + \dfrac{2}{x - 1}$ en $+\infty$, en $-\infty$ et en 1.
3. $f(x) = \dfrac{3x^3 - 7x^2 + 5x - 1}{3x^2 - 4x + 1}$ en 1, en $\dfrac{1}{3}$, en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$ en $+\infty$.
5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ en 4.
6. $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{2 - \sqrt{x^2 - x + 2}}$ en -1.
7. $f(x) = x^3 \cos^4(\dfrac{1}{x^2})$ en 0.

Exercice 10. 1) $\lim\limits_{x \to 0} x - \ln x$, 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln x$, 3) $\lim\limits_{x \to 0} (\ln x)^2 - \ln x + x$,
4) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^2 - \ln x + x$, 6) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 1 - e^x$, 7) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x - 1 - e^x$,
8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2e^x - 1}{e^x + 1}$, 9) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2e^x - 1}{e^x + 1}$, 10) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-3} e^x$,
11) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-4}(\ln x + e^x)$, 12) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{2}x}}{x^3}$, 13) $\lim\limits_{x \to 0} \ln x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Exercice 11. Étudier la limite à droite et la limite à gauche de

$$f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 1}} \text{ en } -1$$

.

Exercice 12. Montrez que la limite de la fonction f aux points proposés n'existe pas :

1. $f(x) = \cos(\dfrac{1}{x})$ en 0.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x} \sin(\dfrac{1}{x^2})$ en 0.

3 Continuité, dérivabilité

3.1 Exercices “pratiques”

Exercice 13. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{|x|}{1+|1-x^2|}$.

1. Exprimer $f(x)$ sans valeurs absolues suivant les valeurs de x.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f

Exercice 14. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f définie par $f(x) = e^{-x} + x + 1$ si $x \leq 0$ et $f(x) = 2 + x^2 \ln x$, si $x > 0$. Même question sur sa dérivée première.

Exercice 15. Dans chacun des cas suivants, dire si l'application f se prolonge par continuité en a et donner le prolongement par continuité le cas échéant :

1. $f : [-3, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$ et $a = 6$.
2. $f : \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$ et $a \in \{-1, 1\}$.

Exercice 16.

1. Soit g la fonction définie sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$. Montrer que g admet une fonction réciproque et l'expliciter.
2. Même question avec la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2+x+2}{x^2+1}$.

Exercice 17. Montrer que l'équation $x^{17} = x^{11} + 1$ a une racine positive.

Exercice 18. Calculer les dérivées des fonctions suivantes, en précisant le domaine de dérivabilité :
$f_1(x) = (\sin x)^{\tan x}$, $\quad f_2(x) = \ln(\tan(\dfrac{x}{2}))$

Exercice 19.

1. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$
   a) Déterminer $f'(x), f''(x), f^{(3)}(x)$, puis conjecturer une expression pour la dérivée $n-$ième. Démontrer cette conjecture par récurrence.
   b) En déduire une expression de la dérivée $n-$ième de $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$
2. Monter par récurrence que $\cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\dfrac{\pi}{2})$ et $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\dfrac{\pi}{2})$. En déduire la dérivée $n-$ième de $g(x) = \sin^2(x)$.

3.2 Exercices “théoriques”

Exercice 20. On se donne une application continue $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ telle que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$. Montrer qu'il existe $a \in [0, 1]$ vérifiant $f(a) = a$.
Que se passe-t-il sans l'hypothèse de continuité ? Et sans la condition $f([0, 1]) \subset [0, 1]$?

Exercice 21. Soit $f : [a, +\infty [\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, telle que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 22. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x, y\ f(x + y) = f(x) + f(y)$.

- Montrer que pour tout rationnel a et tout réel x, on a : $f(ax) = af(x)$. Aide : on le montrera successivement pour a entier, puis entier relatif puis rationnel.
- Montrer que, si on suppose que f est continue, alors on a : $f(ax) = af(x)$ pour tous réels a, x. Aide : utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
- En déduire que les fonctions $x \mapsto ax$ sont les seules fonctions continues vérifiant : $\forall x, y\ f(x + y) = f(x) + f(y)$

4 Etude de fonctions

Exercice 23.

1. Soit $f(t) = A\cos(\omega t - \phi)$. Préciser la période de f, justifier. Proposez un intervalle d'étude bien choisi pour cette fonction.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$. On considère la fonction g, $2\pi-$ périodique telle que $g(t) = \cos(\alpha t)$ pour $-\pi \leq t < \pi$. Sans utiliser de calculatrice, donner l'allure de g sur $[-2\pi, 2\pi]$ pour $\alpha = \frac{1}{4}$ et $\alpha = \frac{3}{4}$.
3. Sans calculatrice et sans calcul, donner l'allure de la courbe représentative de la fonction définie par $f(t) = e^{-t}\cos(\omega t)$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice 24. Étudier les variations et les éventuelles asymptotes de la fonction

$$f : x \mapsto \ln(\sinh(x)) - 2x$$

On évitera d''utiliser les fonctions tanh ou Argth. Donner l'allure de la courbe.

Exercice 25.

1. Soient A, B et x des réels non nuls. Trouver ρ et θ en fonction de A et B tels que $\rho > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$A\cos x + B\sin x = \rho\sin(x + \theta)$$
.
2. Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{cos(x) + sin(x)}$. Déterminer son ensemble de définition. Trouver sa période. En déduire un intervalle d'étude. Étudier ses variations et sa courbe représentative.

Exercice 26. Étudier et tracer la courbe représentative de la fonction $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2 - 1}$.

Exercice 27. Étudier les branches infinies des courbes définies par :
$f(x) = 2x + 1 - \sqrt{x}$, $g(x) = 3x - 5 + \dfrac{x^2 + 3}{e^{2x} - 1}$,