Université de Savoie **LST1**
2009-2010

M101

Td 3. Suites (3 séances).

Exercice 1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{n^2-2}{n^2+n}$. Montrer que (u_n) est croissante et calculer sa limite.

Exercice 2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{2+(-1)^n}{3^n}$. Montrer que (u_n) est décroissante et calculer sa limite.

Exercice 3. Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_n = \dfrac{2}{9n^2+15n+4}$.

1. Montrer qu'il existe deux constantes a et b tels que : $u_n = \dfrac{a}{3n+1} + \dfrac{b}{3n+4}$.
2. En déduire la limite de la suite (S_n) définie par $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i$.

Exercice 4. Calculer les limites des suites suivantes définies par leur terme général :

$$\frac{\sin n}{n},\quad \frac{n^3+2n-1}{2n^3-3n+2},\quad \frac{n!}{n^n},\quad \sqrt{n+1}-\sqrt{n},\quad \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n},\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k},\quad \frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}.$$

Exercice 5. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$ et (v_n) la suite définie par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
2. Calculer la limite de la suite (v_n), puis celle de (u_n).

Exercice 6. Étudier la suite définie par son premier terme u_0 et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} - 1$

Exercice 7.
On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 1$.
2. Prouvez que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - 1 \leq \dfrac{u_n - 1}{2}$.
3. Démontrez que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n - 1| \leq \dfrac{3}{2^n}$.
4. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 8. Montrer que les suites $u_n = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^2+1}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2}$ (définies pour $n \geq 3$) sont adjacentes.

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n>0}$ la suite réelle définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ pour $n > 0$.

1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < 2$ et que (u_n) est convergente. Sa limite est $e-1$ mais on ne vous demande pas de le montrer.

Exercice 10. Soient a, b deux réels strictement positifs. On définit les suites (u_n) et (v_n) par : $u_0 = a$, $v_0 = b$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$. Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes et que leurs limites sont égales.

Exercice 11. Soit et (v_n) deux suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$. Dire si les énoncés suivants sont vrais, et sinon donner un contre-exemple :

1. Si (u_n) converge, alors elle est monotone.
2. Si (u_n) diverge, alors elle est monotone.
3. Si (u_n) diverge, alors elle est non bornée.
4. Si (u_n) est décroissante et non minorée, alors elle tend vers $-\infty$.
5. Si $(|u_n|)$ converge vers 0, alors (u_n) converge vers 0.
6. Si $(|u_n|)$ converge vers ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ ou (u_n) converge vers $-\ell$.
7. Si (u_n) converge vers ℓ, alors $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$.
8. Si (u_n) est à termes strictement positifs et $\lim u_n = \ell$, alors ℓ est strictement positif.
9. Si (v_n) converge vers 0, alors $(u_n v_n)$ converge vers 0.

Exercice 12.

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{3}{2n-1}$. Trouver $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1$, $|u_n| \leq 10^{-4}$. Puis, pour $\varepsilon > 0$, trouver $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2$, $|u_n| \leq \varepsilon$.
2. Même question avec la suite $u_n = \dfrac{3n}{2n^2 - 1}$.

Exercice 13. Soient (u_n) et (v_n) des suites. Montrer que si $(u_n) \to +\infty$ et (v_n) est minorée, alors $(u_n + v_n) \to +\infty$.

Exercice 14. Montrer le théorème des gendarmes.

Exercice 15. Soit (u_n) une suite réelle telle que, pour tout n, $u_n \in \mathbb{Z}$. Montrer que (u_n) est convergente ssi elle est stationnaire, c'est à dire si elle est constante à partir d'un certain rang.