Université de Savoie **LST1**
2009-2010

M101

Td 2 : Nombres complexes, 2.5 séances.

Exercice 1.

1. Dans le plan complexe, dans chaque cas, représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que :
   a) $|\text{Re}z| = 5$.
   b) $|z + 3i| = 5$, (par deux méthodes différentes : algébrique et géométrique).
   c) $Arg(z) = \pi/4$ puis $Arg(z - 2) = \pi/4$ (sans calcul).
2. Dans le plan complexe
   a) hachurer la zone correspondant à $A \cap B$ lorsque :
   $$A = \Big\{z \in \mathbb{C},\ |z+1| < 2\Big\}, \quad B = \Big\{z \in \mathbb{C},\ |\text{Im}z| > 1/2\Big\}, \quad C = \Big\{z \in \mathbb{C},\ \frac{3\pi}{4} \leq Arg(z) \leq \pi\Big\}$$
   b) Idem avec $A \cup C$.
   c) Idem avec $B \cap C$.
3. Dans le plan complexe,
   a) préciser la nature de l'ensemble A des points M d'affixe z et donner une représentation graphique rapide.
   $$A = \Big\{M(z), z = 2e^{ix} \text{ avec } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]\Big\}$$
   b) z_0 étant un complexe fixé, a étant un réel positif fixé, même question qu'au 1) avec :
   $$B = \Big\{M(z), z = z_0 + ae^{i\theta} \text{ avec } \theta \in]0, \pi[\Big\}$$

Exercice 2. On considére dans le plan les points A et B d'affixes respectives $1 - i$ et $\sqrt{3} + i$. Calculer les affixes s des points C pour lesquels le triangle ABC est rectangle isocèle avec angle droit en B.

Exercice 3. Soit $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$. Calculer module et argument de z_1 et z_2, les écrire sous forme exponentielle puis les représenter graphiquement. Déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$ en utilisant $\frac{z_1}{z_2}$.

Exercice 4.

1) Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :
   a) $z_1 = -3 - 5i$ (pour l'argument, donner une valeur approchée exprimée en degrés dans l'intervalle $] - 180, 180[$)
   b) $z_2 = 1 + i$
   c) $z_3 = (1 + i)^5$ (sans développer)
   d) $z_4 = -5ie^{i\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$
   e) $z_5 = 1 + e^{i\theta},\ \theta \in] - pi, \pi[$ (indication : écrire $z_5 = e^{\frac{i\theta}{2}} \times (\ldots)$)
2) Déterminer la valeur des nombres complexes suivants :
   a) $z_k = e^{ik\pi}$ pour $k \in \mathbb{Z}$
   b) $z_k = e^{i(\frac{\pi}{2}+k\pi)}$ pour $k \in \mathbb{Z}$

   (plusieurs cas peuvent être envisagés pour chaque question)

Exercice 5. Représenter graphiquement $e^{\frac{5\pi i}{12}}$ et $2e^{\frac{-i\pi}{4}}$.

Exercice 6. Trouver les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants : $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$ et $\dfrac{(2+i)^3+(1-i)^2}{1+i+(2i-1)^2}$.

Exercice 7. Calculer $z = \dfrac{(1-i)^{2007}}{(1+i)^{2012}}$.

Exercice 8. Pour $\theta \in [0, 2\pi]$, on pose $z = \sin 2\theta + i(1+\cos 2\theta)$. Déterminer module et argument de z en fonction de θ.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 + z + 1 = 0$;
2. $(4+2i)z^2 - 2(3+2i)z + 2 - i = 0$.
3. $z^2 - (5-14i)z - 2(5i+12) = 0$
4. $z^2 - 2(1+ia^2)z + (1-a^4) = 0$, $a \in R$.

Exercice 10.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1+\sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : $z + \dfrac{1}{z} = 1$, et $z + \dfrac{1}{z} = \sqrt{2}$.
3. Soit $P(z)$ le polynôme tel que : $P(z) = z^4 - (1+\sqrt{2})z^3 + (2+\sqrt{2})z^2 - (1+\sqrt{2})z + 1$.
   Vérifier que : $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{P(z)}{z^2} = (z+\dfrac{1}{z})^2 - (1+\sqrt{2})(z+\dfrac{1}{z}) + \sqrt{2}$.
   En utilisant ce qui précède, résoudre l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 11.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$ et déterminer la somme des solutions.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
   a) $z^3 = 1 - i$
   b) $z^5 = 1$