Université de Savoie **LST1**
2009-2010

M101A

Td 1 : Techniques de base, 4 séances.

Exercice 1. Encadrer $x+y$, $x-y$, xy, $\dfrac{x}{y}$, sachant que $x \in [3;6]$ et $y \in [-4;-2]$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2+1$. En utilisant une représentation du graphe de f, déterminer (sans d'autres justifications) : $f([5,10[)$, $f^{-1}([5,10[)$, $f(]-3,2[)$, $f^{-1}(]-3,2[)$, $f^{-1}(f(]-3,2[))$, $f(f^{-1}(]-3,2[))$.

Exercice 3. Signe $\sum$ et valeur absolue.

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n} m$ et $\sum_{k=1}^{n} k$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n} q^k$ pour $q \neq 1$ et en déduire $\sum_{k=m}^{n} q^k$.
3. Montrer que $\forall k \geq 1, \sin(\frac{\pi}{6k}) \leq \frac{1}{2}$.
4. En déduire que $\forall n \geq 1$, $|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sin(\frac{\pi}{6k})^k| \leq 1$.

Exercice 4.

1. Déterminer un encadrement de $\dfrac{x+\ln x}{1+x^2}$ sur $[1,2]$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x \leq x-1$.
3. En déduire un encadrement de $f(x)$ sur $[1,+\infty[$.

Exercice 5.
Majorer sur $\mathbb{R}_+$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x \cos^2 x}{2(x+e^x)}$.

Exercice 6.
Soit $f(x) = \dfrac{x\sin(x^3+1)+3\sqrt{x}\cos x}{x^4+2x-3}$.

1. Montrer que $\forall x \in [2,+\infty[$, $x^4+2x-3 \geq 8x$.
2. En déduire que $\forall x \in [2,+\infty[$, $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 7. Pour x donné, $E(x)$ désigne la partie entière de x, c'est-à-dire : $E(x) = n$, avec $n \in \mathbb{Z}$ et $n \leq x < n+1$. Représentez graphiquement les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-2,3]$ par $f(x) = E(x)$ et $g(x) = x - E(x)$.

Exercice 8. Cherchez l'ensemble de définition des fonctions g et h définies par : $g(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x^3-x^2+x}}$ et $h(x) = \sqrt{|-5x^2-7x|-6}$

Exercice 9. Représentez graphiquement la fonction f définie par : $f(x) = |x|+|x-1|+|x+1|$.

Exercice 10. Démontrer par récurrence :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\},\ \forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ (1+a)^n > 1+na$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1.1! + 2.2! + 3.3! + \cdots + n.n! = (n+1)! - 1$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$.
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k}$ (*formule du binôme*). À l'aide de cette formule, expliciter le développement de $(a-b)^4$.
5. Déduire de la formule du binôme la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k$.

Exercice 11. Effectuer la division euclidienne de A par B :

1. $A(X) = X^5 + X^4 - X^3 + X - 1$, $B(X) = X^3 + X^2 + 2$.
2. $A(X) = X^7 + 2X^6 + 3X^5 + 2X^2 + 7X + 4$, $B(X) = X^5 + 2$.
3. $A(X) = 2X^6 + 3X^5 + X^4 + 3X^3 + 5X^2 + 5X + 13$, $B(X) = X^4 + X + 1$.

Exercice 12. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $P(x) = 4x^2 + 5x + 1$.
2. $P(x) = x^4 + x^2 - 6$.
3. $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 + 2x$.
4. $P(x) = x^4 - x^3 - x - 1$.

Exercice 13. Calculer les dérivées des fonctions suivantes : $f_1(x) = 3^{2x}$, $f_2(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$, $f_3(x) = \ln(e^x + e^{3x})$, $f_4(x) = \dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}$ en précisant le domaine de dérivabilité.

Exercice 14. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions suivantes :
$f(x_1, x_2) = x_1^7 e^{3x_2}$, $\quad g(x,y) = \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y}{x^2}$, $\quad h(x,y) = 5^x + 2x(1+y)$, $\quad l(s,t) = \dfrac{s-t}{\ln(st)}$.

Exercice 15. Calculer toutes les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions suivantes. Pour la fonction h on se limitera au calcul de $\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}$.
$f(x,y) = 2^x e^{5y}$, $\quad g(s,t) = \ln(s^2 + t)$, $\quad h(u,v) = \sqrt{2uv + v^2}$.

Exercice 16. Compléter si possible avec l'un des symboles suivants $\Leftarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ puis reformuler ces phrases en utilisant les notions de conditions nécessaires et/ou suffisantes.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 = 4 \ldots\ x = 2$
2. $a \leq b \ldots a^2 \leq b^2$
3. $\forall a \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 < a \ldots x < a$
4. Soit $A(x)$ la formule : $x^2 > 0 \Rightarrow x > 0$. Donner la contraposée $B(x)$ et la réciproque $C(x)$ de $A(x)$. Pour quelles valeurs de x réel, A, B, C sont elles vraies ?

Exercice 17. Donner les bornes supérieure et inférieure de $A = \{(-1)^n(1 - 1/n)\ /\ n \in \mathbb{N}^*\}$ et de $B = \{\dfrac{1}{n} + sin(\dfrac{n\pi}{2})\ /\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 18. Donner la négation des phrases suivantes :

1. Il existe un exercice de maths qui n'est pas amusant.
2. Aucun mathématicien n'est farceur.
3. Tous les habitants de Chambéry qui ont les yeux bleus gagneront au loto et prendront leur retraite avant 50 ans.
4. Tous les habitants de Chambéry qui ont les yeux bleus gagneront au loto ou prendront leur retraite avant 50 ans.

Exercice 19. Les assertions suivantes sont-elles vraies ? Justifier votre réponse et écrire la négation de celles qui vous paraissent fausses :

1. a) $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $y \geq x^2$; b) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}\ y \geq x^2$; c) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}\ y \leq x^2$;
2. a) $\exists A \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x \leq A \Rightarrow x^n \leq 1$;
3. a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists M \in \mathbb{R}$, $e^x \leq M$; b) $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \leq M$;
   c) $\exists! M \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin x \leq M$; d) $\forall A \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}$, $\forall x \geq M$, $\ln x \geq A$
4. a) P désignant un plan euclidien, $\forall A \in P$, $\forall B \in P$, $\exists! M \in \mathbb{R}\ AM = BM$.

Exercice 20.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Ecrire les phrases suivantes (et leurs négations), avec des notations entièrement symboliques.

1. f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21. Montrer que, si f et g sont des fonctions, alors :

1. $f \circ g$ injective, g surjective $\Rightarrow$ f injective.
2. $f \circ g$ surjective, f injective $\Rightarrow$ g surjective.
3. $f \circ g$ injective $\Rightarrow$ g injective.
4. $f \circ g$ surjective $\Rightarrow$ f surjective.

Exercice 22. On note E l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ et F l'ensemble des fonctions de E dans E. On définit la fonction Φ de E dans F de la manière suivante : pour $A \in E$, $\Phi(A)$ est la fonction qui à B associe $A \cap B$. Montrer que Φ est injective.

Exercice 23.
Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse (en justifiant) :

1. $\forall\, A, B \in \mathcal{P}(E),\ A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$;
2. $\forall\, A, B \in \mathcal{P}(E),\ f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
3. $\forall\, C, D \in \mathcal{P}(F),\ C \subset D \implies f^{(-1)}(C) \subset f^{(-1)}(D)$;
4. $\forall\, C, D \in \mathcal{P}(F),\ f^{(-1)}(C \cup D) = f^{(-1)}(C) \cup f^{(-1)}(D)$;
5. $\forall\, A \in \mathcal{P}(E),\ f^{(-1)}(f(A)) = A$;
6. $\forall\, C \in \mathcal{P}(F),\ f(f^{(-1)}(C)) = C$.