Université de Savoie **LST1**
2009-2010

M101

Correction des exercices 17(fin), 21 et 23 du Td1.

Exercice 17.

$$B = \{\frac{1}{n} + \sin(\frac{n\pi}{2}), n \in \mathbb{N}^*\}$$

Pour se donner une idée de l'ensemble on écrit les éléments correspondant aux premières valeurs de n :

$$B = \{2, \frac{1}{2}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{6}{5}, \frac{1}{6}, \frac{-6}{7}, \ldots\}$$

Il semble qu'il y ait trois types d'éléments dans B : ceux pour lesquels n est pair, ceux pour lesquels n est impair et qui s'écrivent $n = 4p + 1$ pour un certain p et ceux pour lesquels n est impair et pour lesquels n s'écrit $4p + 3$ pour un certain entier p. On note B_1 les éléments de la première catégorie, B_2 ceux de la secondes et B_3 ceux de la dernière. On a $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ et on peux écrire :

$$\begin{array}{rll} B_1 = & \{\frac{1}{2k},\, k \in \mathbb{N}^*\} & \\ B_2 = & \{\frac{1}{4p+1} + \sin(\frac{(4p+1)\pi}{2}),\, p \in \mathbb{N}\} & = \{\frac{1}{4p+1} + \sin(\frac{\pi}{2}),\, p \in \mathbb{N}\} \\ = & \{1 + \frac{1}{4p+1},\, p \in \mathbb{N}\} & \\ B_3 = & \{\frac{1}{4p+3} + \sin(\frac{(4p+3)\pi}{2}),\, p \in \mathbb{N}\} & = \{\frac{1}{4p+3} + \sin(\frac{3\pi}{2}),\, p \in \mathbb{N}\} \\ = & \{-1 + \frac{1}{4p+3},\, p \in \mathbb{N}\} & \end{array}$$

On a alors :

$$B_1 = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\}$$
$$B_2 = \{2, \frac{6}{5}, \ldots\}$$
$$B_3 = \{\frac{-2}{3}, \frac{-6}{7}, \ldots\}$$

Les suites qui définissent les ensembles B_1,B_2 et B_3 sont toutes les 3 décroissantes et convergente (quand respectivement k ou p tend vers l'infini). Par conséquent les termes des suites qui définissent les ensembles sont majorées par leurs premiers termes et minorées par leurs limites. Autrement dit on a :

$$\forall x \in B_1, 0 < x \leq \frac{1}{2}$$
$$\forall x \in B_2, 1 < x \leq 2$$
$$\forall x \in B_3, -1 < x \leq \frac{-2}{3}$$

On voit alors que tout x de B est majoré par 2, donc 2 est un majorant de l'ensemble B. Comme de plus 2 est dans l'ensemble B, aucun réel strictement plus petit que 2 ne peut être un majorant de l'ensemble B puisque on a immédiatement un élément de B qui lui est strictement plus grand (à savoir 2). En conséquence : 2 est la *borne supérieure* de l'ensemble B et on note $2 = \sup(B)$. Comme de plus 2 appartient à B on dit aussi que 2 est le *maximum* de l'ensemble ce que l'on note par $2 = \max(B)$.
D'autre part on voit que tout élément de B est minoré par -1 donc -1 est un minorant de B. En revanche, -1 n'est pas dans l'ensemble B donc on ne peut affirmer immédiatement qu'il s'agit de la borne inférieure de B. En revanche on sait que $-1 + \frac{1}{4p+3}$ tend vers -1 lorsque p tend vers l'infini, ce qui veut dire exactement, qu'aussi près de -1 que je le souhaite je peux trouver des éléments appartenant à B_3. Par conséquent si je me donne une valeur α supérieure à -1, même très légèrement (en fait aussi proche de -1 que je le veux mais supérieure et différente de -1) je saurais trouver des éléments de B_3 qui sont strictement inférieur à α et par conséquent α ne sera pas un minorant de B_3 et donc a fortiori de B.
Par conséquent, la *borne inférieure* de B (c'est à dire le plus grand des minorants de B) est bien -1 que l'on note $-1 = \inf(B)$. En revanche, -1 n'étant pas dans l'ensemble B, -1 n'est pas le minimum de B (cet ensemble n'admet donc pas de minimum).

Exercice 21.

1. Supposons que $f \circ g$ est injective et que g est surjective. Montrons qu'alors f est injective.
   Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Il faut montrer que $x = y$. Par surjectivité de g, il existe $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x = g(X)$ et $y = g(Y)$, donc $f \circ g(X) = f \circ g(Y)$. Par injectivité de $f \circ g$, on a donc $X = Y$, ainsi $g(X) = g(Y)$ d'où $x = y$.
2. Supposons que $f \circ g$ est surjective et que f est injective. Montrons qu'alors g est surjective.
   Soit $X \in \mathbb{R}$. On veut montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $X = g(x)$. Définissons $Y = f(X)$. Par surjectivité de $f \circ g$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $Y = f \circ g(x)$. Ainsi $f(X) = f \circ g(x)$, c'est-à-dire $f(X) = f(g(x))$ donc par injectivité de f, on en déduit que $X = g(x)$.
3. Supposons que $f \circ g$ est injective et montrons qu'alors g est injective.
   Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g(x) = g(y)$. Il faut montrer que $x = y$. $g(x) = g(y)$ donc $f \circ g(x) = f \circ g(y)$ d'où $x = y$ par injectivité de $f \circ g$.
4. Supposons que $f \circ g$ est surjective et montrons qu'alors f est surjective.
   Soit $X \in \mathbb{R}$. Il faut montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $X = f(x)$. $f \circ g$ est surjective donc il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $X = f \circ g(y)$. On pose $x = g(y)$, on vérifie alors que $X = f(x)$.

Exercice 23.
Soit f une fonction de E dans F.

1. $$\forall A, B \in \mathcal{P}(E)\; A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$$
   La proposition est vraie. En effet prenons A et B deux ensembles quelconques de E et supposons A inclus dans B. Nous devons montrer que $f(A)$ est inclus dans $f(B)$ autrement dit nous devons prouver :
   $$y \in f(A) \Rightarrow y \in f(B).$$
   Prenons alors y dans $f(A) = \{f(x), x \in A\}$. Par définition de l'image directe d'un ensemble par une fonction, il existe x dans A tel que $y = f(x)$. Mais puisque x est dans A il est aussi dans B puisque A est inclus dans B. Enfin par définition de l'image directe de B par f, $f(x)$ appartient à $f(B)$, donc y appartient à $f(B)$. Ainsi tout élément de $f(A)$ est un élément de $f(B)$ donc $f(A)$ est inclus dans $f(B)$.
2. $$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$
   La proposition est vraie. Soient A et B deux ensembles de E. Puisqu'on veut montrer une égalité entre deux ensembles on procède par double inclusion.
   - Montrons : $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$
     Soit y appartenant à $f(A \cup B)$. Il existe x appartenant à $A \cup B$ tel que $y = f(x)$. Si x appartient à A alors $f(x)$ appartient à $f(A)$ qui est inclus dans $f(A) \cup f(B)$ et donc $f(x)$ appartient à $f(A) \cup f(B)$. De même si x appartient à B, $f(x)$ appartient à $f(B)$ donc à $f(A) \cup f(B)$. Dans tous les cas, pour tout x de $A \cup B$, $f(x) = y$ appartient à $f(A) \cup f(B)$. On a ainsi montré que tout élément de $f(A \cup B)$ est dans $f(A) \cup f(B)$.
   - Montrons : $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$
     On a A et B inclus dans $A \cup B$. D'après la question précédente on sait qu'alors, on a $f(A)$ et $f(B)$ inclus dans $f(A \cup B)$.On a donc a fortiori $f(A) \cup f(B)$ contenu dans $f(A \cup B)$.
3. $$\forall C, D \in \mathcal{P}(F)\; C \subset D \Rightarrow f^{(-1)}(C) \subset f^{(-1)}(D)$$
   La proposition est vraie. Soient C et D deux ensembles de F tels que C est inclus dans D. Soit x appartenant à $f^{(-1)}(C) = \{x \in E, f(x) \in C\}$. Par définition de l'image réciproque d'un ensemble par une fonction, $f(x)$ appartient à C. Puisque C est inclus dans D, $f(x)$ appartient aussi à D. et donc par définition de $f^{(-1)}(D)$, x appartient à $f^{(-1)}(D)$. Ainsi tout élément de $f^{(-1)}(C)$ est élément de $f^{(-1)}(D)$ donc $f^{(-1)}(C)$ est inclus dans $f^{(-1)}(D)$.
4. $$\forall C, D \in \mathcal{P}(F)\; f^{(-1)}(C \cup D) = f^{(-1)}(C) \cup f^{(-1)}(D)$$
   La proposition est vraie. Soient C et D deux ensembles de F. On procède par double inclusion.

– Montrons : $f^{(-1)}(C \cup D) \subset f^{(-1)}(C) \cup f^{(-1)}(D)$.
Soit x appartenant à $f^{(-1)}(C \cup D$. Par définition de l'image réciproque, cela signifie que $f(x)$ appartient à $C \cup D$. Si $f(x)$ appartient à C, x appartient à $f^{(-1)}(C)$ donc a fortiori x appartient $f^{(-1)}(C) \cup f^{(-1)}(D)$. De même si $f(x)$ appartient à D, x appartient à $f^{(-1)}(D)$ donc à $f^{(-1)}(C) \cup f^{(-1)}(D)$. Dans tous les cas x appartient à $f^{(-1)}(C) \cup f^{(-1)}(D)$ et on a montré la première inclusion.
– Montrons $f^{(-1)}(C) \cup f^{(-1)}(D) \subset f^{(-1)}(C \cup D)$.
On procède exactement de la même manière que pour les images directes : C et D sont tous les deux inclus dans $C \cup D$ et par la question précédente on sait qu'on a alors $f^{(-1)}(C)$ et $f^{(-1)}(D)$ inclus dans $f^{(-1)}(C \cup D)$. Par conséquent $f^{(-1)}(C) \cup f^{(-1)}(D)$ est inclus dans $f^{(-1)}(C \cup D)$.

5.
$$\forall A \in \mathcal{P}(E)\, f^{(-1)}(f(A)) = A$$

Cette proposition est **fausse** dans le cas général.

– Ce qui est vrai en général c'est la proposition suivante : $\forall A \in \mathcal{P}(E)\, A \subset f^{(-1)}(f(A))$
En effet soit x appartenant à A. alors par définition de $f(A)$, $f(x)$ appartient à $C = f(A)$. Mais dire que $f(x)$ appartient à C c'est la même chose que de dire que x appartient à $f^{(-1)}(C)$. Ici cela signifie que x appartient à $f^{(-1)}(f(A))$. Comme c'est vrai pour n'importe quel élément de A on a l'inclusion ensembliste $A \subset f^{(-1)}(f(A))$.
– La proposition $\forall A \in \mathcal{P}(E)\, f^{(-1)}(f(A)) = A$ est vraie lorsque f est **injective**.
En effet dans ce cas là si on prend x dans $f^{(-1)}(f(A))$ cela signifie que $f(x) = y$ appartient à $f(A)$. Par conséquent il existe un x' de A tel que $y = f(x')$ (par définition de l'image directe). On a donc $f(x) = f(x')$. On se sert maintenant de l'hypothèse d'injectivité de f : on en déduit que $x = x'$ et par conséquent x appartient à A. On a donc montré l'inclusion ensembliste $f^{(-1)}(f(A)) \subset A$. L'autre inclusion étant vraie dans le cas général (que f soit injective ou non) on a bien l'égalité ensembliste recherchée.
– Si f n'est pas injective on peut trouver des contre-exemples, c'est à dire trouver des cas particulier de f, E, F et A pour lesquels la propriété est fausse.
Prenons comme cas particulier la fonction $f : x \mapsto x^2$ de $E = \mathbb{R}$ dans $F = \mathbb{R}_+$. Cette fonction n'est pas injective, et si on prend $A = [0, 1]$ on a $f([0, 1]) = [0, 1]$ et $f^{(-1)}([0, 1]) = [-1, 1]$. On voit donc que l'inclusion $A \subset f^{(-1)}(f(A))$ est ici stricte.

6.
$$\forall C \in \mathcal{P}(F)\, f(f^{(-1)}(C)) = C$$

De manière symétrique par rapport à la question précédente, cette proposition est **fausse** dans le cas général.

– Ce qui est vrai en général c'est la proposition suivante : $\forall C \in \mathcal{P}(F),\ f(f^{(-1)}(C)) \subset C$
En effet soit y appartenant à $f(f^{(-1)}(C))$. alors si on pose $A = f^{(-1)}(C)$ on a par définition de $f(A)$, qu'il existe x dans A tel que $y = f(x)$. Mais dire que x appartient à A c'est la même chose que de dire que $f(x)$ appartient à C. Ici cela signifie que y appartient à C. Comme c'est vrai pour n'importe quel élément de $f(f^{(-1)}(C))$ on a l'inclusion ensembliste $f(f^{(-1)}(C)) \subset C$.
– La proposition $\forall C \in \mathcal{P}(F)\, f(f^{(-1)}(C)) = C$ est vraie lorsque f est **surjective**.
En effet dans ce cas là si on prend y dans C, on sait par surjectivité de f qu'il existe x dans E tel que $y = f(x)$. Cela signifie que x appartient à $f^{(-1)}(C)$ et donc $f(x) = y$ appartient à $f(f^{(-1)}(C))$. On a donc montré l'inclusion ensembliste $C \subset f(f^{(-1)}(C))$. L'autre inclusion étant vraie dans le cas général (que f soit surjective ou non) on a bien l'égalité ensembliste recherchée.
– Si f n'est pas surjective on peut trouver des contre-exemples.
Prenons comme cas particulier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ de $E = \mathbb{R}_+$ dans $F = \mathbb{R}$. Cette fonction n'est pas surjective, et si on prend $C = [-1, 1]$ on a $f^{(-1)}([-1, 1]) = [0, 1]$ et $f(f^{(-1)}([0, 1])) = [0, 1]$. On voit donc que l'inclusion $f(f^{(-1)}(C)) \subset C$ est ici stricte.