Sujet de Thèse

- **Titre :** Fibre de Milnor motivique réelle
- **Unités de recherche :** LAMA (Université de Savoie) UMR CNRS 5127 / IRMAR (Rennes I) UMR-6625
- **Thème :** Singularités réelles & intégration motivique
- **Mots clefs :** Fibre de Milnor, monodromie, ensembles semi-algébriques réels, théorie des modèles, invariants additifs, espaces d'arcs, intégration motivique.
- **Les noms, prénoms et courriel du directeur de thèse**

Directeur : Georges Comte (Université de Savoie)
georges.comte@univ-savoie.fr
Co-directeur : Goulwen Fichou (Université de Rennes I)
goulwen.fichou@univ-rennes1.fr

Objectif de la thèse

John Milnor décrit dans son célèbre livre [3] la topologie d'une fibre $F_t := f^{-1}(t)$ d'une fonction $f : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ qui admet en $f(0) = 0$ sa seule valeur singulière (t est suffisament proche de 0 dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et la fibre F_t est considérée dans une petite boule centrée en l'origine de $\mathbb{C}^n$). Milnor montre que l'homologie de F_t est celle d'un bouquet de μ sphères S^n, homologie qui s'effondre sur la fibre singulière $F_0 := f^{-1}(0)$ puisque cette dernière est localement contractible. Le nombre μ est appelé le nombre de Milnor et ne dépend pas t (t proche de 0 dans $\mathbb{C}^n$).

J. Denef et F. Loeser ont, pour leur part, au début des années 2000 (cf [2] par exemple), donné une version motivique de la fibre de Milnor, en montrant qu'une certaine fonction génératice construite via des classes de variétés algébriques sur des espaces d'arcs associées à f avait en réalité une expression rationnelle et que celle-ci se réalisait par la caractéristique d'Euler sur μ. Les classes en question sont des éléments d'un certain anneau de Grothendieck, formellement construit pour factoriser les invariants additifs des variétés, ce qui en permet la réalisation sous l'un de ceux-ci, comme la caractéristique d'Euler (le plus élémentaire des invariants additifs pertinents).

Dans le cadre réel, c'est-à-dire lorsque $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, la situation est plus sauvage que dans le cadre complexe. En particulier selon le signe de t, la fibre F_t peut être vide. Cependant G. Comte et G. Fichou ont défini dans [1] un anneau de Grothendieck, non pas des variétés mais des formules semi-algébriques, qui conduit au même type de résultat dans le cadre réel que dans le cadre complexe : une certaine fonction génératrice à coefficients dans cet anneau et liée à f s'avère rationnelle et la réalisation de cette fonction par la caractéristique d'Euler rend compte de la topologie de la fibre de Milnor de f. On appelle cette fonction rationnelle fibre de Milnor réelle de f.

On se propose dans cette thèse de comprendre jusqu'à quel point la fibre de Milnor réelle rend compte de la topologie de la singularitée de f. Ou encore comment peut-on affiner les notions mises en place dans [1] pour rendre compte de notions topologiques à un cran supérieur à celui auquel accède la caractéristqiue d'Euler ? Par exemple peut-on rendre compte d'une certaine notion, à bien définir, de monodromie des formules semi-algébriques réelles ?

[1] G. Comte, G. Fichou, Grothendieck ring of semialgebraic formulas and motivic real Milnor fibre, *Geometry & Topology* 18 (2014), 963-996

[2] J. Denef, F. Loeser, Lefschetz numbers of iterates of the monodromy and truncated arcs, *Topology* 41 (2002), no. 5, 1031-1040

[3] J. Milnor, Singular Points of Complex Hypersurfaces, *Annals of Math. Studies*, no. 61, Princeton University Press, 1969