

Cocktail de géométrie discrète :

Approximation de nombres réels par des rationnels à dénominateur borné

Reconnaissance de plans discrets Épaisseur dans un réseau n -dimensionnel

Les différentes parties de mes travaux de thèse en géométrie discrète et géométrie algorithmique seront présentées durant cet exposé.

Partie 1 : Nous considérons tout d'abord le problème de l'approximation d'un nombre réel par un nombre rationnel de dénominateur borné. Soit a un nombre réel, soit b et b' deux nombres entiers tels que $b < b'$, nous souhaitons déterminer le nombre rationnel $r = p/q$ qui approxime au mieux a , tel que $b \leq q \leq b'$. La principale approche numérique connue utilise le développement en fraction continue du réel a . Géométriquement, ce problème revient à déterminer le point de la grille le plus proche de la droite d'équation $y = ax$ compris dans un domaine vertical défini par $\{(x, y) \mid b \leq x \leq b'\}$. Nous proposons de calculer l'enveloppe convexe des points de la grille situés au dessus (resp. en dessous) de la droite et compris dans le domaine vertical. Notre algorithme atteint une complexité logarithmique en la largeur du domaine vertical. De plus, il est adaptatif puisque le nombre d'itérations en temps constant effectuées par notre algorithme est exactement égal au nombre de sommets des deux enveloppes convexes calculées.

Partie 2 : Par la suite, nous présenterons notre algorithme de reconnaissance de plans discrets. Nous rappelons qu'un ensemble de points S de Z^3 est appelé morceau de plan discret s'il est contenu dans la discrétisation d'un plan euclidien. Un tel algorithme est utilisé pour décider si un sous-ensemble de points d'un objet discret peut être remplacé par une facette dans une représentation polyédrique de l'objet. La méthode proposée décide si un sous-ensemble de points de Z^3 correspond à un morceau de plan discret en résolvant un problème de réalisabilité sur une fonction convexe en dimension 2, dite fonction épaisseur. Ainsi, notre méthode ne prend en compte que deux paramètres et elle utilise des techniques géométriques planaires pour déterminer si l'espace des solutions est vide. Notre algorithme s'exécute en $O(n \log D)$ dans le pire cas où n correspond au nombre de points de l'ensemble S et D représente la taille d'une boîte englobant S . Notre méthode s'avère également efficace en pratique et reconnaît un ensemble de 10^6 points en environ 10 itérations linéaires.

Partie 3 : Si le temps nous le permet, nous aborderons enfin une problématique un peu à part : calculer l'épaisseur d'un ensemble de points de Z^d dans le réseau entier de même dimension (épaisseur latticielle). L'épaisseur d'un ensemble de points K suivant une direction c de Z^d correspond à la quantité $\max\{c^T x \mid x \in K\} - \min\{c^T x \mid x \in K\}$. L'épaisseur latticielle de l'ensemble de points K correspond à l'épaisseur minimum pour toutes les directions du réseau. D'après une idée originale de Fabien FESCHET, nous avons mis en place un algorithme valable en toute dimension pour déterminer cette épaisseur. Cette méthode s'avère optimale puisque linéaire en temps dans le cas planaire. En dimensions supérieures, nous passons par une approche gloutonne qui s'avère efficace en pratique.