RÉSUMÉ

Géométrie Tropicale et systèmes Polynomiaux

Les systèmes polynomiaux réels sont omniprésents dans de nombreux domaines des mathématiques pures et appliquées. A. Khovanskii a fourni une borne *fewnomiale* supérieure sur le nombre de solutions positives non-dégénérées d'un système polynômiale réel de n équations à n variables qui ne dépend que du nombre de monômes apparaissant dans les équations. Cette dernière borne a été récemment améliorée par F. Bihan et F. Sottile, mais la borne résultante peut être encore amélioré, même dans certains simples cas.

Le but de ce travail est d'aborder trois problèmes principaux dans la théorie des fewnomiales. Considérons une famille de systèmes polynomiaux réels avec une structure donnée (par exemple, support ou le nombre de monômes). Trouver des bonnes bornes supérieures pour leurs nombres de solutions réelles (ou positives). Construire des systèmes dont le nombre de solutions réelles (ou positives) sont proches de la meilleure borne supérieure connu. Lorsqu'une borne supérieure exacte est bien connue, qu'est ce qu'on peut dire dans le cas où elle est atteinte ?

Dans cette thèse, nous affinons un résultat de M. Avendaño en démontrant que le nombre de points d'intersection réels d'une ligne réelle avec une courbe réelle plane définie par un polynôme avec au plus t monômes est soit infini ou ne dépasse pas $6t-7$. En outre, on montre que notre borne est exacte pour $t=3$ en utilisant les dessins d'enfant réels de Grothendieck. Cela montre que le nombre maximal de points d'intersection réels d'une ligne réelle avec une courbe trinômiale réelle plane est onze.

Nous considérons ensuite le problème de l'estimation du nombre maximal des points positifs d'intersection transversale d'une courbe plane trinômiale et d'une courbe plane t-nôminale. T-Y Li, J.-M. Rojas et X. Wang ont montré que ce nombre est bornée par 2^t-2, et récemment P. Koiran, N. Portier et S. Tavenas ont trouvé la borne supérieure $2t^3/3+5t$. Nous fournissons la borne supérieure $3\cdot 2^{t-2}-1$ qui est exacte pour $t=3$ et est la plus petite pour $t=4,\ldots,9$. Ceci est réalisé en utilisant la notion de dessins d'enfant réelles. De plus, nous étudions de près les cas $t=3$ et nous donnons une restriction sur les supports des systèmes atteignant la borne exacte cinq.

Un circuit est un ensemble de $n+2$ points dans $\mathbb{R}^n$ qui sont minimalement affinement dépendants. Il est connu qu'un système supporté sur un circuit a au plus $n+1$ solutions positives non dégénérées, et que cette borne est exacte. Nous utilisons les dessins d'enfant réels et le *patchwork combinatoire* de Viro pour donner une caractérisation complète des circuits supportant des systèmes polynomiaux avec le nombre maximal de solutions positives non dégénérées.

Nous considérons des systèmes polynomiaux de deux équations à deux variables avec cinq monômes distincts en total. Ceci est l'un des cas les plus simples, où la borne supérieure exacte sur le nombre de solutions positives non dégénérées n'est pas connue. F. Bihan et F. Sottile ont prouvé que cette borne exacte n'est pas supérieure à quinze. D'autre part, les meilleurs exemples avaient seulement cinq solutions positives non dégénérées. Nous considérons des systèmes polynomiaux comme avant, mais défini sur le corps des *séries de Puiseux réelles généralisées localement convergentes*. Les images par l'application de valuation des solutions d'un tel système sont des points d'intersection positifs de deux courbes tropicales planes. En utilisant des intersections non transverses des courbes tropicales planes, on obtient une construction d'un système polynomial réel comme ci-dessus ayant sept solutions positives non dégénérées.