
LE PROBLÈME DE LÜROTH

par

Arnaud Beauville

Le problème de Lüroth demande si tout corps K avec $\mathbb{C} \subset K \subset \mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$ est de la forme $\mathbb{C}(y_1, \dots, y_p)$. En termes géométriques, si une variété algébrique peut être paramétrée par des fonctions rationnelles, peut-on trouver un tel paramétrage qui soit essentiellement bijectif ?

C'est le cas pour les courbes (Lüroth, 1875) et les surfaces (Castelnuovo, 1894) ; après pas mal de tentatives infructueuses, trois contre-exemples différents ont été trouvés en 1971. Je raconterai l'histoire mouvementée du sujet, puis je décrirai les trois méthodes et expliquerai qu'elles donnent une réponse satisfaisante en dimension 3, mais seulement des exemples très particuliers en dimension plus grande. Puis je discuterai une nouvelle idée de C. Voisin qui a considérablement amélioré la situation.

ARNAUD BEAUVILLE, Laboratoire J-A Dieudonné, Université Nice Sophia Antipolis