Nombres Algébriques Totalement Réels, Propriété de Bogomolov, et Fonction Zeta Dynamique du β-shift

Jean-Louis Verger-Gaugry

Univ. Savoie Mont Blanc, CNRS, LAMA,
F - 73000 Chambéry, France.
email: `Jean-Louis.Verger-Gaugry@univ-smb.fr`

Abstract. Schnizel (1973) avait obtenu la borne inférieure $\frac{1}{2}\mathrm{Log}\,(1+\sqrt{5}/2) = 0.24\ldots$ pour la hauteur de Weil $h(\alpha)$ de tout entier algébrique α totalement réel $\neq 0, \neq \pm 1$, optimalement. Ce problème de minoration de la hauteur est apparenté au problème de Lehmer pour les nombres de Salem avec la mesure de Mahler $\mathrm{M}(\alpha)$. On rappellera les résultats de Langevin, de C. Smyth et de Flammang sur les entiers algébriques totalement réels. Passer des entiers algébriques aux nombres algébriques appelle d'autres techniques.

Bombieri et Zannier (2001) ont introduit la propriété de Bogomolov pour tout corps $F \subset \overline{\mathbb{Q}}$, par analogie avec la Conjecture de Bogomolov: F a la propriété de Bogomolov relativement à h si et seulement si $h(\alpha) = 0$ ou admet une borne inférieure > 0 pour tout $\alpha \in F$. Amoroso et Zannier (2000) l'ont démontrée pour K^{ab}, où K est un corps de nombres, Bombieri et Zannier (2001) pour les corps totalement p-adiques, Habegger (2011) pour $\mathbb{Q}(E_{tors})$, $E/\mathbb{Q}$ courbe elliptique. Fili et Miner (2016), en utilisant des Théorèmes d'équidistribution limite de Favre et Rivera-Letelier, ont prouvé $\liminf h(\alpha) \geq 0.12\ldots$ pour tout α appartenant au corps des nombres algébriques totalement réels $\mathbb{Q}^{tr}$. Pottmeyer (2016), par des techniques de théorie du potentiel sur la droite de Berkovich, obtient $\liminf h(\alpha) \geq \frac{7}{4\pi^2}\zeta(3)$.

Dans ce travail nous montrons que la fonction zeta dynamique du β-shift, relative au système dynamique arithmétique de Rényi-Parry, avec $\beta = \lceil\overline{\alpha}\rceil$, permet de prouver la propriété de Bogomolov pour $\mathbb{Q}^{tr}$, avec une minoration globale explicite.