Classification des variétés analytiques p-adiques compactes

Michel Raibaut, michel.raibaut@univ-smb.fr
Laboratoire de mathématiques, Université Savoie Mont Blanc

Soit p un nombre premier. On considère la valeur absolue p-adique sur $\mathbb{Q}$:

$$\begin{array}{cccc} |.|_p & : & \mathbb{Q} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & p^{-v_p(x)} \end{array}$$

où $v_p(x)$ est la valuation p-adique de x. Le corps des *nombres p-adiques*, noté $\mathbb{Q}_p$, est par définition le complété de $(\mathbb{Q}, |.|_p)$. La distance induite par cette valeur absolue est ultramétrique, elle confère donc à $\mathbb{Q}_p$ des propriétés différentes de celles de $\mathbb{R}$.

L'objectif premier de ce stage sera de comprendre les analogues ultramétriques des constructions étudiées pendant les années universitaires précédentes, à savoir : les propriétés topologiques de $\mathbb{Q}_p$, la notion d'intégrale p-adique, le calcul différentiel sur $\mathbb{Q}_p$ puis la notion de variétés analytiques. On pourra pour cela étudier les livres [1], [2] et [4].

On s'intéressera ensuite à la preuve d'un théorème de Serre qui classifie les variétés analytiques lisses compactes dans le contexte p-adique :

Théorème. *(Serre [3]).*

1. *Toute variété analytique lisse compacte X de dimension n est isomorphe à une union disjointe de r copies de la boule unité p-adique de dimension n,notée $r.B^{(n)}$, pour un entier $r \geq 1$ convenable.*
2. *Pour que $r.B^{(n)}$ et $r'.B^{(n)}$ soient isomorphes, il faut et il suffit que*

$$r = r' \mod p - 1.$$

Ainsi, si on attache à X la classe de r modulo $p-1$, on obtient un élément $i(X)$ appartenant à $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ appelé *invariant p-adique de Serre* qui est un invariant de X et caractérise X à isomorphisme près.

Comme ouverture possible on pourra s'initier à l'*intégration motivique* de Kontsevich, théorie récente et en pleine effervescence. A la différence de $\mathbb{Q}_p$, l'anneau des séries formelles $\mathbb{C}[[t]]$, complété t-adique de $\mathbb{C}[t]$, n'est pas localement compact, il n'y a donc pas de mesure de Haar. L'intégration motivique est alors l'analogue de l'intégration p-adique dans ce contexte, mais les valeurs de l'intégrale ne sont plus réelles, ce sont des *motifs*. Dans ce contexte, il existe aussi un *invariant de Serre motivique*.

Références

[1] Jun-ichi Igusa. *An introduction to the theory of local zeta functions*, volume 14 of *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[2] Neal Koblitz. *p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions*, volume 58 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1984.

[3] Jean-Pierre Serre. *Classification des variétés analytiques p-adiques compactes*, Topology, 3, 1965, 409–412

[4] Jean-Pierre Serre. *Lie algebras and Lie groups*, Lecture Notes in Mathematics, 1500, 1964 lectures given at Harvard University, Corrected fifth printing of the second (1992) edition, Springer-Verlag, Berlin, 2006.