Autour de la fibre de Milnor

Michel Raibaut, michel.raibaut@univ-smb.fr
Laboratoire de mathématiques, Université Savoie Mont Blanc

Soit f un polynôme complexe en n variables. Supposons que f admette un point critique isolé en un point x_0 et notons a la valeur $f(x_0)$.
Milnor [4] démontre alors l'existence de réels ε et η avec $1 >> \varepsilon >> \eta > 0$ tels que

$$f \quad : \quad f^{-1}(B(a,\eta) \setminus \{a\}) \cap B(x_0, \varepsilon) \subset \mathbb{C}^n \quad \to \quad B(a,\eta) \setminus \{a\} \subset \mathbb{C}$$

soit une fibration de classe C^∞ localement triviale.
La fibre de cette fibration est appelée *fibre de Milnor de f au point* x_0 notée F_{x_0}.

Cette fibre a le type d'homotopie d'un bouquet de μ sphères de dimension $n-1$. Ce nombre μ est appelé *nombre de Milnor de f* en x_0 et Milnor prouve l'égalité

$$\mu = \dim \frac{\mathbb{C}\{x_1, ..., x_n\}}{(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n})}.$$

Si f est un polynôme commode et non dégénéré pour son polyèdre de Newton Γ_{x_0}, Kouchnirenko [3] calcule ce nombre en termes de volumes associés à ce polyèdre.
Enfin, considérant une résolution des singularités de f, A'Campo [1] exprime le nombre de Milnor en termes de la combinatoire du diviseur associé à la résolution.

L'objectif de ce stage est avant tout d'utiliser ce contexte pour se familiariser avec les bases de la topologie algébrique à savoir : les notions de groupe fondamental, revêtements, fibrations topologiques localement triviales, homologie et cohomologie.
On s'initiera ensuite à certaines techniques de théorie des singularités comme l'intégration d'un champs de vecteurs convenable pour le théorème de Milnor ou la résolution des singularités pour le calcul d'A'Campo.

Ce stage pourra s'ouvrir sur la considération d'autres invariants attachés à la singularité x_0 notamment ceux induits par l'action de *monodromie* du groupe fondamental $\pi_1(B(a,\eta) \setminus \{a\})$ sur la fibre de Milnor F_{x_0}. On pourra enfin s'intéresser à la *fibre de Milnor motivique* S_{f,x_0} de Denef-Loeser [2], *motif* contenant de nombreux invariants de la fibre de Milnor F_{x_0} et construit à partir des arcs formels dont l'origine est le point x_0.

Références

[1] Norbert A'Campo. La fonction zêta d'une monodromie. *Comment. Math. Helv.*, 50 :233–248, 1975.

[2] Jan Denef and François Loeser. Geometry on arc spaces of algebraic varieties. In *European Congress of Mathematics, Vol. I (Barcelona, 2000)*, volume 201 of *Progr. Math.*, pages 327–348. Birkhäuser, Basel, 2001.

[3] A. G. Kouchnirenko. Polyèdres de Newton et nombres de Milnor. *Invent. Math.*, 32(1) :1–31, 1976.

[4] John Milnor. Singular points of complex hypersurfaces. *Ann. of math. Studies, Princeton Univ.Press, Princeton*, 61, 1968.