Nombres p-adiques et fonction zêta d'Igusa

Michel Raibaut, michel.raibaut@univ-smb.fr
Laboratoire de mathématiques, Université Savoie Mont Blanc

Soit p un nombre premier. On considère la valeur absolue p-adique sur $\mathbb{Q}$:

$$\begin{array}{cccc} |.|_p & : & \mathbb{Q} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & p^{-v_p(x)} \end{array}$$

où $v_p(x)$ est la valuation p-adique de x. Le corps des *nombres p-adiques*, noté $\mathbb{Q}_p$, est par définition le complété de $(\mathbb{Q}, |.|_p)$. La distance induite par cette valeur absolue est ultramétrique, elle confère donc à $\mathbb{Q}_p$ des propriétés différentes de celles de $\mathbb{R}$.

L'objectif premier de ce stage sera de comprendre les analogues ultramétriques des constructions étudiées pendant les années universitaires précédentes, à savoir : les propriétés topologiques de $\mathbb{Q}_p$, la notion d'intégrale p-adique, le calcul différentiel sur $\mathbb{Q}_p$ (on montrera par exemple un théorème des fonctions implicites dans ce cadre là) et par extension la notion de variétés analytiques.

On s'intéressera ensuite à la preuve du théorème d'Igusa (énoncé ici sous forme faible) : Soit $f \in \mathbb{Q}[x_1, .., x_n] \setminus \mathbb{Q}$ et $d\mu$ la mesure de Haar sur $\mathbb{Q}_p^n$, la *fonction zêta p-adique*

$$\begin{array}{cccc} Z_f & : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & & s & \to & \int_{B(0,1)^n} |f(x)|_p^s \, d\mu \end{array}$$

est définie sur l'ouvert $\{s \mid Re(s) > 0\}$ et se prolonge méromorphiquement en une fraction rationnelle sur $\mathbb{C}$.

La preuve de ce théorème sera l'occasion de découvrir la géométrie algébrique et la théorie des singularités, en particulier le théorème de résolution des singularités d'Hironaka et la fameuse conjecture de la monodromie reliant les pôles de cette fraction rationnelle avec les singularités de f.

Comme ouverture possible on pourra s'initier à l'*intégration motivique* de Kontsevich, théorie récente et en pleine effervescence. A la différence de $\mathbb{Q}_p$, l'anneau des séries formelles $\mathbb{C}[[t]]$, complété t-adique de $\mathbb{C}[t]$, n'est pas localement compact, il n'y a donc pas de mesure de Haar. L'intégration motivique est alors l'analogue de l'intégration p-adique dans ce contexte, mais les valeurs de l'intégrale ne sont plus réelles, ce sont des *motifs*.

Pour tout le stage on conseillera de lire les ouvrages d'Igusa [1] et de Kobliz [2].

Références

[1] Jun-ichi Igusa. *An introduction to the theory of local zeta functions*, volume 14 of *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[2] Neal Koblitz. *p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions*, volume 58 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1984.