Proposition de sujet de stage de M2 Mathématiques

LE TROISIEME PROBLEME DE HILBERT ET LES INVARIANTS DE DEHN-HADWIGER

Encadrant : Georges Comte (Laboratoire de Mathématiques – Université Savoie Mont Blanc)

Parmi les 23 problèmes proposés par D. Hilbert au congrès international des mathématiciens de Paris en 1900, le troisième problème a été résolu le premier en 1902 par M. Dehn. Il est à ce titre considéré comme le plus abordable des problèmes de Hilbert. Le troisième problème pose la question suivante : « *Est-il vrai qu'étant donnés deux polyèdres de R^3 d'égal volume (celui-ci étant défini comme un tiers du produit de l'aire de la base par la hauteur) on peut décomposer l'un en un nombre fini de sous-polyèdres pour recomposer l'autre (deux tels polyèdres sont dits équi-décomposables) ?* » Alors que la même question dans le cas des polygones de R^2 avait été résolue positivement par Bolyai en 1832, la réponse de Dehn au troisième problème de Hilbert est négative. Dehn construit en effet des invariants qui sont des invariants de découpage des polyèdres, au sens où deux polyèdres équi-décomposables ont les mêmes invariants, et produit ensuite des exemples de polyèdres de même volume ayant des invariants distincts. Les généralisations aux dimensions supérieures des invariants de Dehn ont été données par Hadwiger. En 1965, J. P. Sydler clos définitivement le problème en montrant que deux polyèdres sont équi-décomposables si et seulement s'ils possèdent même volume et mêmes invariants de Dehn. Ce stage propose de parcourir les différents articles sur le sujet en guise d'introduction aux invariants additifs en géométrie définissable, et débouche sur les notions d'équisingularité réelle, d'anneaux de Grothendieck et d'intégration motivique.

Mots-clefs : Invariants de découpage, invariants de Dehn, invariants de Lipschtz-Killing, valuations, géométrie convexe, géométrie intégrale.

Références bibliographiques principales :

1. P. Cartier, Decomposition des polyèdres: le point sur le troisième problème de Hilbert, *Séminaire Bourbaki*, 1984/5(1986), 261–288
2. C.H. Sah, Hilbert's third problem: scissors congruence, Pitman (1979)
3. V.G. Boltianskii, Hilbert's third problem, Wiley (1978)
4. D. Klain, A short proof of Hadwiger's characterization theorem, Mathematika, 42 (1995), 329-339

email : georges.comte@univ-smb.fr