

Proposition de stage M2 :

Problèmes à discontinuité libre de type Robin

Lieu du stage : LAMA, Le Bourget du Lac

Encadrant : D. Bucur

dorin.bucur@univ-savoie.fr

L'objectif du stage est l'étude d'un problème d'optimisation de formes avec conditions de Robin sur la frontière inconnue. Précisément, l'exemple modèle sur lequel on va se concentrer est le suivant :

$$\min\{\lambda_k(\Omega) : \Omega \subset D, |\Omega| = c\},$$

pour $k = 1, 2$. Ici, $D \subseteq \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné donné, $\beta > 0$ est fixé et Ω est un ouvert inconnu. Par $\lambda_1(\Omega), \lambda_2(\Omega)$ on note les deux premières valeurs propres du Laplacien sur Ω avec des conditions de Robin au bord. Par exemple,

$$\lambda_1(\Omega) = \min_{u \in H^1(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \beta \int_{\partial\Omega} u^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx}.$$

Par $|\Omega|$ on note la mesure de Ω .

Si l'ouvert D est suffisamment grand pour qu'une boule de mesure égale à c rentre dedans, alors par un résultat de type Faber-Krahn (dû à Bossel et Daners), la solution du problème sera cette boule, pour $k = 1$. Si D est étroit et ne contient pas de boule de volume c , alors le problème d'existence de solution (domaine Ω optimal) ainsi que l'étude des propriétés qualitatives de son bord deviennent intéressants. Le problème pour $k = 2$ est encore plus intéressant car la fonction propre changera de signe.

Le déroulement du stage et les questions auxquelles nous allons nous intéresser sont :

- Compréhension des notions fondamentales sur les espaces des fonctions spéciales à variation bornée (SBV).
- Modélisation du problème d'optimisation de formes dans le cadre SBV, et relaxation dans un problème à discontinuité libre.
- Etude de l'existence de solution et des propriétés qualitatives de l'ensemble de saut (le bord inconnu) : l'ensemble des sauts est-il un fermé ? A-t-il une mesure \mathcal{H}^{N-1} finie ? Si l'ensemble D est non borné, que peut-on dire du domaine optimal ? Y a-t-il des fractures dans le domaine optimal ?
- Etude de la régularité de la frontière libre. Cette question est difficile et ne pourra pas être complètement attaquée ; pourtant, on pourra essayer de comprendre certaines situations particulières.

Références

- [1] D. Bucur, D. Daners. An alternative approach to the Faber-Krahn inequality for Robin problems. *Calc. Var. Partial Differential Equations* 37 (2010), 75–86.
- [2] D. Bucur, A. Giacomini. A variational approach to the isoperimetric inequality for the Robin eigenvalue problem. *Arch. Rational Mech. Anal.* 198 (2010), 927–961.
- [3] D. Bucur, A. Giacomini. Faber-Krahn inequalities for the Robin-Laplacian : A free discontinuity approach. *Arch. Rational Mech. Anal.* 218 (2015), 757–824.
- [4] D. Bucur, S. Luckhaus. Monotonicity formula and regularity for general free discontinuity problems. *Arch. Rational Mech. Anal.* 211 (2014), 489–511.
- [5] L.A. Caffarelli, D Kriventsov. A free boundary problem related to thermal insulation. *Comm. Partial Differential Equations* 41 (2016), no. 7, 1149–1182.